

• U • C •

FCTUC

FACULDADE DE CIÊNCIAS  
E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA

# **Determinação da Lei de Encruamento de Chapas Metálicas Anisotrópicas com Recurso ao Ensaio de Expansão em Matrizes Circular e Elíptica sob Pressão Hidráulica**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica na Especialidade de Sistemas de Produção

**Autor**

**Carlos André Barata Rodrigues**

**Orientadores**

**Doutor José Valdemar Bidarra Fernandes**

**Doutora Nataliya Sakharova**

**Júri**

**Presidente**      **Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira**  
                         **Professora Auxiliar da Universidade de Coimbra**

**Vogais**              **Doutor Abel Dias dos Santos**  
                         **Professor Auxiliar da Universidade do Porto**  
                         **Doutor José Valdemar Bidarra Fernandes**  
                         **Professor Catedrático da Universidade de Coimbra**  
                         **Doutora Nataliya Sakharova**  
                         **Investigadora Auxiliar da Universidade de Coimbra**

**Coimbra, Fevereiro, 2012**



“O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis.”

Fernando Pessoa

À Fátima, Carlos, Lili e Xana.



## Agradecimentos

*O trabalho aqui apresentado, só foi possível graças à colaboração e ao apoio incondicional de algumas pessoas, às quais aqui agradeço:*

*Ao Professor Doutor José Valdemar Fernandes,  
pelo desafio que me proporcionou e pelas elevadas competências científicas que possui.  
Um agradecimento muito especial pelo apoio ao longo do trabalho, pela paciência e  
compreensão nos momentos de menor empenho.  
Os meus sinceros e profundos agradecimentos.*

*À Doutora Nataliya Sakharova,  
pela orientação e esclarecimentos prestados. Quero ainda expressar o meu apreço pelo  
apoio e esforço despendido na realização deste trabalho e pela leitura crítica e sugestiva  
do texto.*

*À Professora Doutora Marta Oliveira,  
pela disponibilidade e interesse demonstrados, a análise crítica, encorajamento e bom  
humor manifestados no presente estudo.*

*Ao meu colega Pedro Prates,  
pela dedicação, partilha de conhecimentos e disponibilidade desde o início desta tarefa.*

*A toda a minha família, em especial aos meus Pais e irmã,  
pelo apoio incondicional nos estudos e orgulho pelo meu percurso académico. Pela  
amizade e compreensão. Sem vocês não conseguiria chegar até aqui.  
O meu muito Obrigado.*

*À Alexandra Ramos,  
pelo apoio, paciência e carinho que sempre deu nos momentos de desânimo e cansaço.*

*Aos meus amigos, sem precisar de mencionar nomes,  
o meu profundo agradecimento pelo apoio e por me terem aturado nos bons e  
principalmente maus momentos. Pelo incentivo e sobretudo pelo convívio e pelas saídas  
acompanhadas sempre pela boa disposição!*



## Resumo

O presente trabalho centra-se na simulação numérica do ensaio de expansão biaxial, em matrizes circular e elíptica, sob pressão hidráulica, com recurso ao programa *DD3IMP*. São realizados diversos ensaios de modo a determinar a curva de encruamento de chapas metálicas, até valores elevados de deformação. A análise de resultados segue uma metodologia idêntica à utilizada experimentalmente, tendo como objectivo testá-la e simplificá-la.

Neste contexto, foi realizado um estudo em chapas anisotrópicas, apresentando ou não anisotropia de propriedades no seu plano, com a finalidade de determinar a respectiva curva de encruamento, a partir de ensaios em matrizes circular e elíptica.

Numa primeira fase, realizou-se um estudo sobre o ensaio de expansão em matriz circular para cada material, analisando as evoluções de pressão e do raio de curvatura com a altura do pólo da calote. Foi determinada a curva de encruamento e realizada uma análise de erro.

Posteriormente, foi realizado o mesmo tipo de estudo, em alguns dos materiais analisados anteriormente, mas para o ensaio de expansão biaxial em matriz elíptica.

Em ambos os casos, matriz circular e elíptica, foram testadas metodologias de análise que permitem simplificar o procedimento experimental habitualmente utilizado, nomeadamente no que diz respeito à determinação dos raios de curvatura no topo da calote, necessária à avaliação das tensões no plano da chapa e da tensão equivalente.

Este estudo permitiu examinar a possibilidade de obtenção de uma curva única de evolução do raio de curvatura em função da altura no pólo para o caso de materiais anisotrópicos, ensaiados em matriz circular. A análise foi estendida ao caso da matriz elíptica.

**Palavras-chave:** Ensaio de Expansão Biaxial, Teoria da Membrana, Simulação Numérica, Lei de Encruamento Swift, Critério de Plasticidade Hill'48.



## Abstract

This work focuses on the numerical simulation of the biaxial bulge test, with circular and elliptical dies, under hydraulic pressure, using the in-house code DD3IMP. Several tests are performed until high strain values in order to determine the work hardening law on metal sheets. The analysis of results follows a methodology similar to the one used experimentally, aiming to test and simplify it.

In this context, a study was carried out in anisotropic metal sheets, presenting or not in-plane isotropy of properties, in order to determine their hardening curve from tests on circular and elliptical dies.

In a first stage, a study was performed concerning the bulge testing in a circular die for each material, analyzing the evolution of the pressure and radius of curvature with the pole height. Then, the hardening curve was determined and an error analysis was performed.

Complementarily, the same type of study was carried out on some of the previous used materials but for the bulge testing in an elliptical die.

In both cases, elliptical and circular die, methodologies of analysis were tested that allow to simplify the experimental procedures commonly used, namely concerning the determination of the radii of curvature in the pole, necessary to the evaluation of the in-plane stresses of the metal sheet and the correspondent equivalent stress.

This study allowed examining the possibility of obtaining a single curve for the evolution of the radius of curvature as a function of height in the pole for the case of anisotropic materials, tested in circular die. The analysis was extended to the case of elliptic die.

**Keywords** Hydraulic Bulge Test, Membrane Theory, Numerical Simulation, Swift Hardening Law, Hill'48 Yield Criterion.

## Índice

Índice de Figuras .....	xi
Índice de Tabelas .....	xv
Simbologia e Siglas .....	xvii
Simbologia.....	xvii
Siglas .....	xviii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Enquadramento .....	1
1.2. Objectivos .....	2
1.3. Guia de leitura.....	3
2. MODELAÇÃO DO ENSAIO .....	5
2.1. Discretização da chapa.....	6
3. ENQUADRAMENTO TEÓRICO .....	9
3.1. Critério de Hill'48.....	9
3.2. Teoria da membrana .....	12
4. MATERIAIS ESTUDADOS.....	17
5. MATRIZ CIRCULAR.....	21
5.1. Isotropia no plano da chapa .....	21
5.2. Anisotropia no plano da chapa.....	30
5.2.1. Lei de encruamento ( $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ).....	34
5.2.2. Lei de encruamento ( $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ).....	40
5.2.3. Lei de Encruamento – Análise final .....	47
6. MATRIZ ELÍPTICA .....	49
7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....	59
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	63



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Dimensões das matrizes: (a) circular; (b) elíptica.....	5
Figura 2. Ensaio de expansão, com a identificação de algumas dimensões da ferramenta (Santos et al., 2010).....	6
Figura 3. Discretização da malha no plano da chapa (Reis, 2011a): (a) regiões distintas (dimensões em milímetros); (b) geometria global da malha.....	7
Figura 4. Eixos principais de anisotropia de uma chapa laminada.....	9
Figura 5. Provete de tracção paralelo ao plano da chapa e fazendo um ângulo $\alpha$ com a direcção de laminagem ( $DL$ ); os eixos $Oz$ e $Oz'$ são coincidentes.....	11
Figura 6. Coeficiente de anisotropia $r(\alpha)$ , no plano da chapa, respeitante aos materiais com isotropia neste plano.....	19
Figura 7. Distribuição de $r(\alpha)$ no plano da chapa, respeitante aos materiais com anisotropia neste plano: (a) $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b) $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .....	19
Figura 8. Distribuição de $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$ no plano da chapa, respeitante aos materiais com anisotropia neste plano: (a) $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b) $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .....	20
Figura 9. Evolução da pressão, $p$ , com a altura do pólo, $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa.....	21
Figura 10. Evolução do raio de curvatura, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa.....	22
Figura 11. Evolução do raio de curvatura, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa (símbolos), e a respectiva equação de ajuste (linha).....	23
Figura 12. Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).....	25
Figura 13. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo, $\epsilon$ .....	25
Figura 14. Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (25) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.), para materiais isotrópicos no plano da chapa.....	26
Figura 15. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de ajuste com base na equação (25), em função da deformação equivalente no pólo, $\epsilon$ .....	26

Figura 16. Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.), para materiais isotrópicos no plano da chapa. ....	27
Figura 17. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ . ....	28
Figura 18. Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.). ....	29
Figura 19. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ . ....	29
Figura 20. Evolução da pressão, $p$ , com a altura do pólo, $h$ : (a) para chapas com $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b) para chapas com $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ . ....	30
Figura 21. Evolução da pressão máxima em função de $(r(\alpha = 0^\circ) + r(\alpha = 90^\circ))/2$ . ....	31
Figura 22. Superfícies de plasticidade dos materiais estudados: (a) $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ e $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b) $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ . As rectas a preto indicam a trajectória de tensão equibiaxial (que ocorre para todos os casos em (a)); as rectas a cores indicam: (i) eixo da elipse, a tracejado e (ii) trajectória de tensão, a cheio. ....	33
Figura 23. Evolução da espessura, $t$ , em função da altura do pólo, $h$ , para todos os materiais. ....	33
Figura 24. Evolução do raio de curvatura segundo $Ox$ , $\rho = \rho_1 = \rho_2$ , em função da altura do pólo, $h$ . ....	34
Figura 25. Evolução do raio de curvatura do pólo a $0^\circ$ , $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , para os materiais em que $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ , e respectiva linha de ajuste. ....	35
Figura 26. Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.). ....	36
Figura 27. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ . ....	36
Figura 28. Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (27) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.). ....	37
Figura 29. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de ajuste com base na equação (27), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ . ....	37

Figura 30. Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	38
Figura 31. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	38
Figura 32. Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	39
Figura 33. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	40
Figura 34. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo a direcção que faz um ângulo de $0^\circ$ com $Ox$ .	41
Figura 35. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo a direcção que faz um ângulo de $90^\circ$ com $Ox$ .	41
Figura 36. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo direcções que fazem ângulos de $0^\circ$ e $90^\circ$ com $Ox$ (como nas Figuras 16 e 17), mostrado as equações de ajuste respectivas.	42
Figura 37. Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).	43
Figura 38. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	44
Figura 39. Comparação da curva de encruamento, determinando os raios de curvatura com base nas equações (28) e (29) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	44
Figura 40. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base na análise pela teoria da membrana e nas equações (28) e (29), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	45
Figura 41. Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	45
Figura 42. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	46
Figura 43. Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	46

Figura 44. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	47
Figura 45. (a) Representação gráfica das equações de potência ajustadas neste capítulo e da equação (26) (Reis et al., 2011b); (b) Diferenças relativas entre as primeiras e a equação (26).	48
Figura 46. Evolução da pressão, $p$ , com a altura do pólo, $h$ (matriz elíptica).	50
Figura 47. Superfícies de plasticidade dos materiais ensaiados em matriz elíptica. As rectas a cores indicam as trajectórias de tensão; a recta a preto indica a trajectória de tensão equibiaxial.	51
Figura 48. Trajectórias de deformação. As rectas a cheio e tracejado com dois pontos representam as simulações em matriz elíptica; as rectas a tracejado representam simulações em matriz circular.	51
Figura 49. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo a direcção do eixo maior da matriz.	52
Figura 50. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo a direcção do eixo menor da matriz.	52
Figura 51. Evolução do raio de curvatura do pólo, $\rho$ , em função da altura do pólo, $h$ , segundo as direcções dos eixos maior (EM) e menor (em) da matriz, mostrando os respectivos coeficientes de correlação.	53
Figura 52. Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).	54
Figura 53. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao <i>software NXT Defect Evaluator</i> para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	54
Figura 54. Idêntica à da Figura 51, mas com correcção da deformação elástica.	55
Figura 55. Idêntica à Figura 52 mas com correcção da deformação elástica.	56
Figura 56. Comparação da curva de encruamento, determinando os raios de curvatura com base nas equações (30) e (31) (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	56
Figura 57. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando os raios de curvatura com base nas equações (30) e (31), em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	57
Figura 58. Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).	57
Figura 59. Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo, $\varepsilon$ .	58



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Simulações numéricas, designações dos materiais e parâmetros do critério Hill'48 .....	18
Tabela 2. Altura e pressão máximas no pólo para os materiais com isotropia no plano da chapa.....	22
Tabela 3. Valores médios de $r(\alpha)$ , da razão $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$ e de altura e pressão máximas no pólo, para os materiais com anisotropia no plano da chapa.....	30
Tabela 4. Altura e pressão máximas no pólo, para os ensaios em matriz elíptica.....	50



## SIMBOLOGIA E SIGLAS

### Simbologia

$\alpha$  – Orientação do eixo do provete de tracção em relação à direcção de laminagem

$\bar{\varepsilon}$  e  $\varepsilon$  – Deformação equivalente

$\varepsilon_0$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  – Deformações principais logarítmicas, no plano da chapa, e em espessura, respectivamente

$\varepsilon_1^e$  e  $\varepsilon_2^e$  – Deformações elásticas principais no plano da chapa

$d\varepsilon_1$  e  $d\varepsilon_2$  – Incrementos infinitesimais de deformações principais logarítmicas no plano da chapa

$d\varepsilon_{xx}, d\varepsilon_{yy}, d\varepsilon_{zz}, d\varepsilon_{xy}, d\varepsilon_{xz}$  e  $d\varepsilon_{yz}$  – Incrementos infinitesimais de deformação plástica segundo o sistema de eixos de anisotropia da chapa

$d\varepsilon_{x'}, d\varepsilon_{y'}$  e  $d\varepsilon_{z'}$  – Incrementos infinitesimais de deformação plástica segundo a direcção de tracção, em largura e em espessura, respectivamente

$d\lambda$  – Factor de proporcionalidade escalar

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\rho$  – Raio de curvatura

$\rho_1$  e  $\rho_2$  – Raio de curvatura, paralelo e perpendicular à direcção de laminagem, no plano da chapa

$\rho_{ext}$  – Raio de curvatura no topo exterior da calote

$\bar{\sigma}$  e  $\sigma$  – Tensão equivalente

$\sigma_0$  – Tensão limite de elasticidade

$\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  – Tensões principais, no plano da chapa, e em espessura, respectivamente

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  – Componentes do tensor das tensões de Cauchy

$a, b$  e  $c$  – Constantes de ajuste da lei de potência

$d$  – Distância ao pólo no plano da chapa  
 $DL, DT$  e  $DN$  – Direcções de laminagem, transversal e normal ao plano da chapa, respectivamente  
 $E$  – Módulo de Elasticidade  
 $F(\sigma_{ij})$  – Critério de plasticidade  
 $F, G, H, L, M$  e  $N$  – Parâmetros do critério de anisotropia de Hill'48  
 $h$  – Altura de pólo  
 $K$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift  
 $n$  – Coeficiente de encruamento  
 $NE$  – Número total de elementos quadrangulares  
 $p$  – Pressão hidráulica  
 $p_{máx}$  – Pressão máxima imposta  
 $r$  – Coeficiente de anisotropia  
 $r^2$  – Coeficiente de correlação  
 $R_c$  – Raio inicial da chapa  
 $R_f$  – Raio do freio (do eixo de revolução à zona do freio)  
 $R_{mc}$  – Raio de curvatura da matriz  
 $t$  – Espessura da chapa  
 $t_0$  – Espessura inicial da chapa

## Siglas

DD3IMP – Programa de simulação de processos de conformação plástica com o método dos elementos finitos. Contracção de Deep Drawing 3D IMPlicit code

NXT – Programa que avalia a curvatura da superfície

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Enquadramento

Os processos tecnológicos de conformação por deformação plástica de chapas metálicas continuam a patentear desafios experimentais e numéricos. No que diz respeito à caracterização do comportamento mecânico, tem-se assistido ultimamente ao desenvolvimento de novos procedimentos experimentais (Santos et al., 2010; Santos et al., 2011; Koç et al., 2011; Zang et al., 2011), assim como de modelos para melhorar a descrição da superfície de plasticidade (por exemplo: Barlat et al., 2005; Hu, 2005) e da sua evolução durante a deformação plástica (por exemplo: Lee et al., 2005a, Lee et al., 2005b). Também, do ponto de vista numérico, tem-se intensificado o desenvolvimento de metodologias relacionadas com a caracterização do comportamento mecânico dos materiais, em particular, recorrendo a metodologias de análise inversa (Prates, 2010; Prates et al., 2011). Muitos destes desenvolvimentos estão associados à utilização crescente de “novos” materiais, tais como os aços de alta resistência, o alumínio, o magnésio, etc., e de novas técnicas experimentais, em particular, técnicas de correlação digital de imagem.

Os resultados da simulação numérica por elementos finitos de processos tecnológicos de conformação por deformação plástica estão dependentes da conveniente caracterização e modelação do comportamento mecânico das chapas. Independentemente do modelo constitutivo utilizado nas simulações (lei de encruamento, critério de plasticidade anisotrópico e lei de evolução da superfície de plasticidade durante a deformação), as estratégias de identificação dos parâmetros destas leis, os ensaios experimentais utilizados e os respectivos procedimentos de análise, desempenham um papel importante na conveniente caracterização do comportamento mecânico de chapas metálicas, isto é na determinação dos parâmetros das leis constitutivas.

Ensaio como a tracção simples, a diferentes ângulos com a direcção de laminagem, corte puro e tracção biaxial simétrica (provete cruciforme) são muito utilizados para a identificação dos parâmetros das leis constitutivas (Koç et al., 2011; Zang et al., 2011). Nos primeiros, isto é, tracção e corte, as trajectórias de deformação não

correspondem às geralmente observados na estampagem de chapa. A tracção biaxial simétrica em provete cruciforme não permite atingir valores de deformação equiparáveis aos observados em peças estampadas (Teixeira, 2005). Como alternativa, surge o ensaio de expansão biaxial, sob pressão de óleo que permite atingir valores relativamente elevados de deformação plástica. Porém, em geral, apenas se utiliza a matriz circular, limitando a trajectória de deformação à expansão biaxial simétrica ou próxima, dependendo da anisotropia do material. De facto, os estudos sobre ensaios em matriz elíptica são relativamente escassos (Rees, 1995).

## **1.2. Objectivos**

Os objectivos deste trabalho prendem-se com a determinação da curva tensão – deformação equivalente, com recurso ao ensaio de expansão biaxial em matrizes circular e elíptica, sob pressão de óleo. Deste modo, é possível ter acesso ao comportamento do material segundo várias trajectórias de deformação em expansão biaxial, até valores de deformação relativamente elevados. Estuda-se, com recurso à simulação numérica, o procedimento adequado à determinação experimental da lei de encruamento, quantificando os erros associados a diversas hipóteses simplificadoras. Na abordagem efectuada, pressupõe-se o conhecimento de variáveis, tais como, a pressão, os raios e as deformações no topo da calote, fornecidas por dispositivos clássicos de medição ou por técnicas mais recentes, como a correlação digital de imagem.

### 1.3. Guia de leitura

Esta secção tem como objectivo ajudar o leitor a enquadrar-se com a estrutura da dissertação, apresentando breves resumos de todos os capítulos que a constituem. Para além do presente capítulo (*Introdução*), no qual sinteticamente se perspectiva este trabalho, no âmbito da Engenharia Mecânica, da mecânica computacional e, particularmente, das tecnologias de conformação, esta dissertação compreende mais seis capítulos.

No capítulo dois (*Modelação do Ensaio*) descreve-se a modelação utilizada no ensaio de expansão em matrizes circular e elíptica, definindo as ferramentas, a geometria da chapa e a sua discretização no plano e em espessura.

No capítulo três (*Enquadramento Teórico*) procede-se a um estudo teórico, sobre a anisotropia de uma chapa laminada, quando o seu comportamento mecânico é descrito pelo critério de Hill'48, e sobre a metodologia geralmente utilizada experimentalmente, na determinação da lei de encruamento de chapas metálicas.

No capítulo quatro (*Materiais Estudados*) apresentam-se os materiais estudados nesta dissertação, descrevendo a sua anisotropia no plano da chapa, e justificando a sua escolha.

No capítulo cinco (*Matriz Circular*) apresentam-se os resultados e realiza-se um estudo sobre metodologias simplificadas de determinação da curva de encruamento, recorrendo a um ensaio de expansão em matriz circular, com o objectivo de poderem ser utilizadas experimentalmente.

No capítulo seis (*Matriz Elíptica*) realiza-se um estudo em apenas alguns materiais analisados no capítulo anterior, mas recorrendo a um ensaio de expansão em matriz elíptica, com objectivos idênticos aos do capítulo anterior.

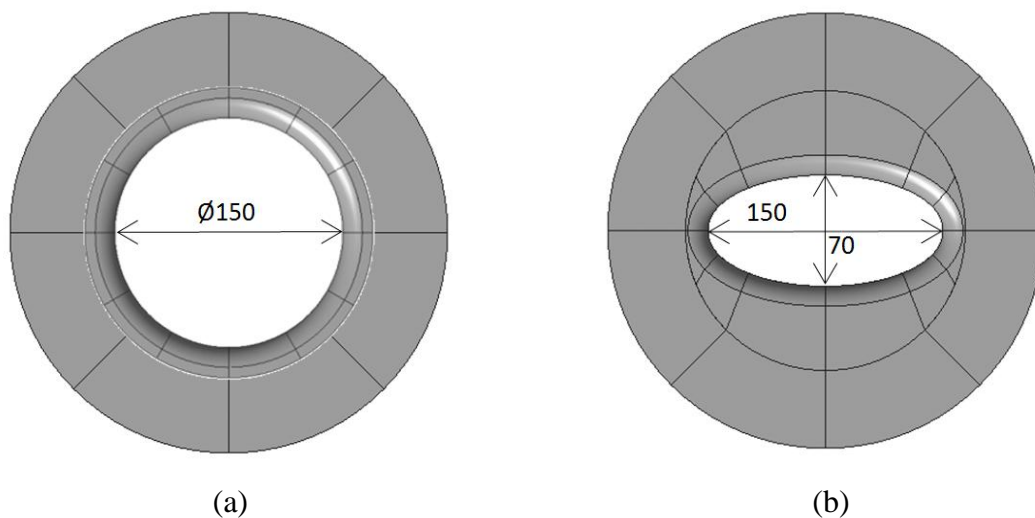
No capítulo sete (*Conclusões e Perspectivas*) apresentam-se as principais conclusões desta dissertação e são referidas algumas perspectivas de continuação deste trabalho.





## 2. MODELAÇÃO DO ENSAIO

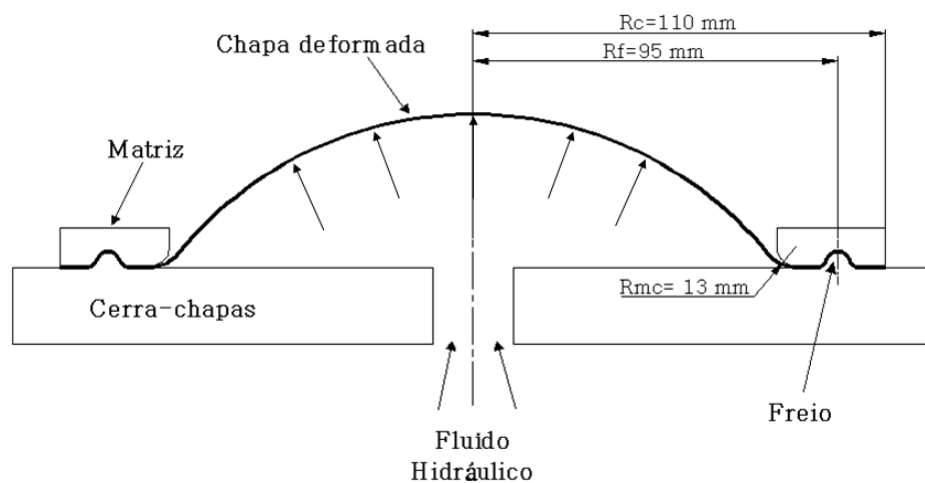
O ensaio de expansão biaxial foi realizado em matrizes circular e elíptica. O diâmetro interno da matriz circular é igual a 150 mm e os eixos da matriz elíptica são iguais a 150 e 70 mm, como se mostra na Figura 1. A chapa é sempre posicionada com a direcção de laminagem (*DL*) paralela à direcção horizontal desta figura, excepto no caso da matriz elíptica quando os coeficientes de anisotropia a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com a direcção de laminagem são diferentes ( $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ); neste último caso, são realizados dois ensaios, um com *DL* horizontal e outro com *DL* vertical.



**Figura 1.** Dimensões das matrizes: (a) circular; (b) elíptica.

A geometria detalhada das ferramentas é a apresentada na Figura 2. O processo envolve três fases: (i) o aperto do cerra-chapas; (ii) a aplicação da pressão hidráulica e (iii) a remoção da pressão e das ferramentas. A ferramenta apresenta um freio cujo objectivo é eliminar o escorregamento da periferia da chapa na direcção radial. A simulação numérica da geometria real do freio exige uma discretização muito refinada da chapa, que contribui fortemente para o aumento do tempo computacional, devido às pequenas dimensões características do freio. Uma vez que o freio elimina o escorregamento da periferia da chapa, a sua substituição por condições de fronteira equivalentes não altera

significativamente os resultados obtidos. De facto, no caso de matriz circular a comparação de resultados de simulação numérica obtidos, com a geometria real do freio e com condições de fronteira equivalentes, mostra que (Alves et al., 2005): (i) a existência de freio introduz alguma deformação plástica suplementar, no centro da chapa, inferior a 0,01; (ii) a evolução da altura do pólo com a pressão é semelhante em ambos os casos (diferença relativa inferior a 5%). Assim, a simulação numérica pode ser realizada considerando apenas o modelo equivalente do freio.



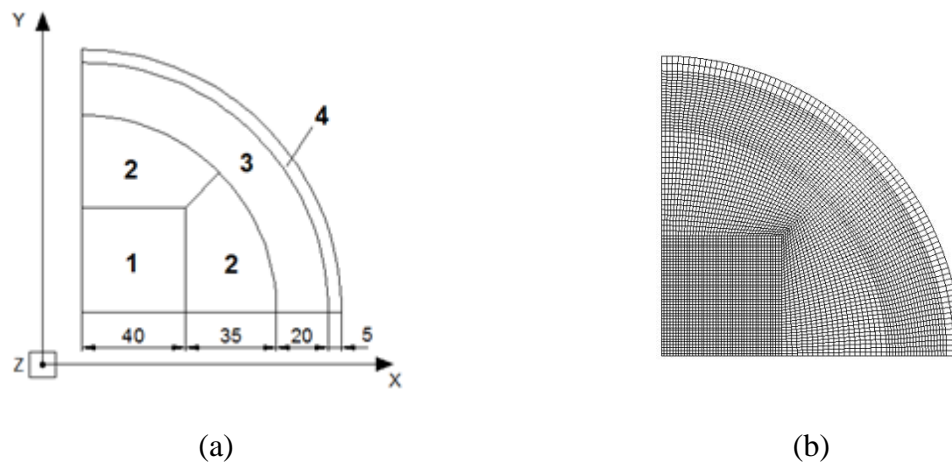
**Figura 2.** Ensaio de expansão, com a identificação de algumas dimensões da ferramenta (Santos et al., 2010).

O modelo numérico utilizado (Reis, 2011a; Reis et al., 2011b) considera apenas um quarto da geometria do ensaio, devido à simetria geométrica e material. Além destas condições de simetria, são impostas restrições ao deslocamento radial dos nós posicionados a uma distância do centro correspondente à zona de influência do freio ( $R_f = 95 \text{ mm}$ , ver Figura 2). As ferramentas são modeladas com superfícies de Bézier e o contacto com atrito é descrito pela lei de Coulomb, com um coeficiente de atrito de 0,02. O modelo considera uma chapa com um raio inicial,  $R_c$ , de 110 mm e uma espessura inicial de 1 mm.

## 2.1. Discretização da chapa

A discretização no plano da chapa apresenta uma geometria inicial correspondente a um quarto de círculo. O programa DD3IMP permite a utilização de

elementos finitos sólidos hexaédricos de oito nós, que, quando combinados com uma técnica de integração selectiva reduzida, conduzem a bons resultados na simulação numérica de processos que envolvem grandes deformações (Menezes e Teodosiu, 2000). A discretização no plano da chapa com uma distribuição de elementos quadrangulares uniformes obrigou à definição de três regiões principais, para permitir a construção de uma malha regular, como se mostra na Figura 3 (a). Deste modo, a discretização garante na zona 1 uma malha relativamente fina (dimensão média do elemento inferior a 1 mm) e regular, para obtenção de resultados. A geometria global da malha apresentada na Figura 3 (b) foi escolhida após um estudo realizado por Reis et al. (2011b) em que foram testadas diversas dimensões de elementos. Esta geometria, que mostrava uma evolução estável do raio de curvatura,  $R$ , em função da distância ao pólo,  $d$ , apresenta um total de 10584 elementos quadrangulares ( $NE$ ) e considera dois elementos em espessura, com dimensão média no plano de 0,952 mm, na zona 1, e de 1,75 mm, na zona 2.



**Figura 3.** Discretização da malha no plano da chapa (Reis, 2011a): (a) regiões distintas (dimensões em milímetros); (b) geometria global da malha.



### 3. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

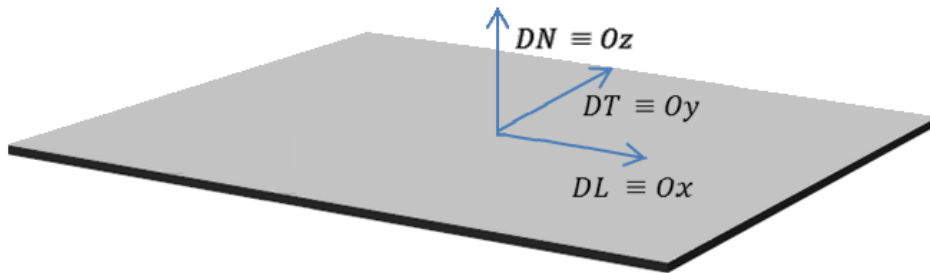
Neste capítulo descrevem-se os aspectos teóricos relacionados com (i) a anisotropia de uma chapa laminada, quando o seu comportamento mecânico é descrito pelo critério de Hill'48, e (ii) a determinação da curva tensão – deformação equivalente de chapas metálicas, com recurso ao ensaio de expansão biaxial sob pressão de óleo.

#### 3.1. Critério de Hill'48

O estado de anisotropia das chapas laminadas é tal que possuem três planos de simetria perpendiculares entre si, ou seja as chapas possuem ortotropia de propriedades. Dois destes planos são perpendiculares ao plano da chapa, sendo um paralelo à direcção de laminagem e o outro à direcção transversa da chapa; o terceiro plano é paralelo ao plano da chapa. As rectas de intersecção destes três planos são designadas por eixos principais de anisotropia e são, conseqüentemente, paralelos às direcções de laminagem (*DL*), transversa (*DT*) e da normal ao plano da chapa (*DN*). Representando os eixos principais de anisotropia por  $O_x$ ,  $O_y$  e  $O_z$  (Figura 4), o critério de plasticidade anisotrópico de Hill'48 escreve-se (Hill, 1950):

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = \bar{\sigma}^2, \quad (1)$$

em que  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são os parâmetros definidores do estado de anisotropia,  $\sigma_{ii}$  e  $\tau_{ij}$  representam as componentes do tensor das tensões de Cauchy, no sistema de eixos principais de anisotropia e  $\bar{\sigma}$  representa a tensão equivalente.



**Figura 4.** Eixos principais de anisotropia de uma chapa laminada.

Se o estado de tensão for biaxial no plano da chapa ( $O_{xy}$  por exemplo; ver Figura 4), como acontece geralmente durante a estampagem de chapas, a equação anterior ganha a forma simplificada:

$$\bar{\sigma}^2 = (G + H)\sigma_{xx}^2 + (F + H)\sigma_{yy}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2N\tau_{xy}^2 . \quad (2)$$

No caso de isotropia completa de propriedades, o critério de Hill'48 converte-se no critério isotrópico de von Mises, e as duas equações anteriores passam a escrever-se ( $F = G = H = 0,5$  e  $L = M = N = 1,5$ ), respectivamente:

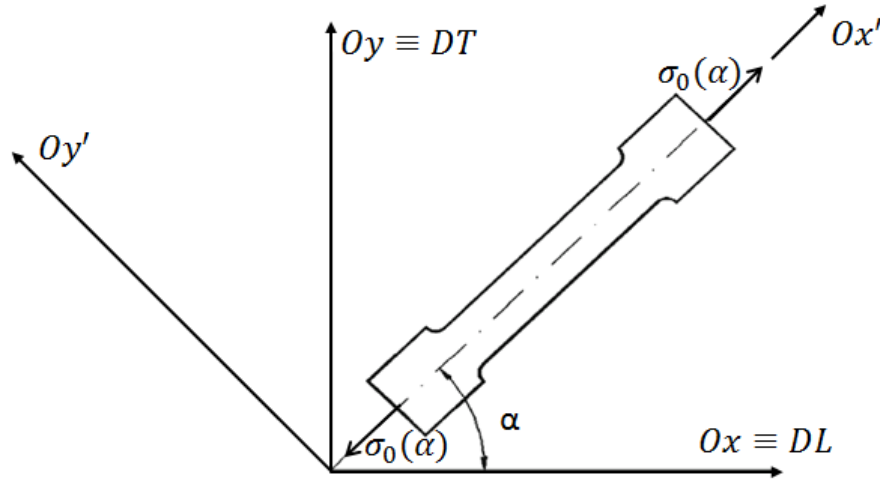
$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 = 2\bar{\sigma}^2 , \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}^2 = (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 . \quad (4)$$

No caso de um ensaio de tracção de um provete em que o seu eixo se situa no plano da chapa e faz com a direcção de laminagem um ângulo  $\alpha$  (Figura 5), é possível descrever, com base na equação (2), a evolução da tensão limite de elasticidade em função do ângulo  $\alpha$  (Hill, 1950):

$$\sigma_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha + H + (2N - F - G - 4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}} . \quad (5)$$

Ou seja, conhecendo os parâmetros,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$ , do critério de Hill'48, pode conhecer-se a evolução de  $\sigma_0(\alpha)$  no plano da chapa.



**Figura 5.** Provete de tracção paralelo ao plano da chapa e fazendo um ângulo  $\alpha$  com a direcção de laminagem ( $DL$ ); os eixos  $Oz$  e  $Oz'$  são coincidentes.

As relações tensão – deformação em regime plástico são obtidas a partir da lei de plasticidade associada ou lei da normalidade, assumindo que o incremento infinitesimal de deformação plástica,  $d\varepsilon_{ij}$ , é sempre perpendicular à superfície de plasticidade, qualquer que seja a orientação do incremento infinitesimal de tensão,  $d\sigma_{ij}$ , para fora desta superfície (ver por exemplo: Hill, (1950)):

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial (\sigma_{ij})}, \quad (6)$$

em que a função  $F(\sigma_{ij})$  representa o critério de plasticidade e  $d\lambda$  é um factor de proporcionalidade escalar.

A equação anterior, aplicada ao critério anisotrópico de Hill'48, conduz às seguintes relações tensão – deformação em regime plástico:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{xx} = d\lambda [H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + G(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})] \\ d\varepsilon_{yy} = d\lambda [F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + H(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})] \\ d\varepsilon_{zz} = d\lambda [G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) + F(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})] \\ d\varepsilon_{yz} = d\lambda L \tau_{yz} \\ d\varepsilon_{xz} = d\lambda M \tau_{xz} \\ d\varepsilon_{xy} = d\lambda N \tau_{xy} \end{cases} \quad (7)$$

Em isotropia, o critério de Hill'48 resume-se ao critério de von Mises (1913) ( $F = G = H = 0,5$  e  $L = M = N = 1,5$ ) e as equações anteriores simplificam-se:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{xx} = d\lambda \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} \\ d\varepsilon_{yy} = d\lambda \frac{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{3} \\ d\varepsilon_{zz} = d\lambda \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{3} \\ d\varepsilon_{yz} = d\lambda \tau_{yz} \\ d\varepsilon_{xz} = d\lambda \tau_{xz} \\ d\varepsilon_{xy} = d\lambda \tau_{xy} \end{cases} \quad (8)$$

Define-se coeficiente de anisotropia de uma chapa,  $r(\alpha)$ , como sendo a razão entre a deformação plástica em largura,  $d\varepsilon_{y'}$ , e a deformação plástica em espessura,  $d\varepsilon_{z'}$ , (segundo  $O_{y'}$  e  $O_{z'}$ , respectivamente, ver Figura 5), durante o ensaio de tracção. Para um provete, cujo eixo faz um ângulo  $\alpha$  com  $O_x$ ,  $r(\alpha)$  é dado por:

$$r(\alpha) = \frac{d\varepsilon_{y'}}{d\varepsilon_{z'}} \quad (9)$$

As equações (7) e (9) permitem descrever a evolução do coeficiente de anisotropia em função do ângulo  $\alpha$ , no plano da chapa (Hill, 1950):

$$r(\alpha) = \frac{H + (2N - F - G - 4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha}; \quad (10)$$

$$r(\alpha = 0^\circ) = \frac{H}{G}; \quad r(\alpha = 45^\circ) = \frac{N}{(F + G)} - \frac{1}{2}; \quad r(\alpha = 90^\circ) = \frac{H}{F}.$$

Ou seja, conhecendo os parâmetros,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$ , do critério de Hill'48, pode conhecer-se a variação de  $r(\alpha)$ , no plano da chapa, de modo idêntico ao que acontece com  $\sigma_0(\alpha)$  (equação (5)).

### 3.2. Teoria da membrana

Com o auxílio da teoria da membrana pode analisar-se a tensão instalada numa chapa durante o ensaio de expansão biaxial em matriz circular ou elíptica, quando a espessura da chapa é pequena relativamente ao raio da calote. Assim, desprezando as tensões de flexão e, assumindo que a tensão em espessura  $\sigma_3 (= \sigma_z)$  é nula, a relação entre as tensões no pólo, a pressão e a geometria da calote é dada por (ver por exemplo: Rees (1995)):



$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t} , \quad (11)$$

em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais no plano da chapa (assumindo que os eixos principais de tensão ( $O_{123}$ ) e de anisotropia ( $O_{xyz}$ ) da chapa coincidem),  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são os raios de curvatura, a meia espessura, correspondentes às direcções principais de anisotropia da chapa,  $p$  é a pressão hidráulica e  $t$  é a espessura da chapa.

Para se determinar experimentalmente a curva de encruamento é necessário obter, durante o ensaio, as evoluções da pressão,  $p$ , dos raios de curvatura,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , e da espessura no pólo,  $t$ . A espessura determina-se com base no conhecimento da espessura inicial da chapa,  $t_0$ , e da deformação,  $\varepsilon_3$ , tal que:

$$t = t_0 \exp(-\varepsilon_3) . \quad (12)$$

A deformação em espessura pode ser determinada a partir das deformações principais no plano da chapa,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  com base na conservação de volume:

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) . \quad (13)$$

Durante o ensaio de expansão biaxial, os raios de curvatura,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , podem ser obtidos com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*, que avalia a curvatura da superfície, com base em coordenadas de pontos situados no mesmo plano. O raio de curvatura obtido através deste software refere-se à superfície exterior da calote esférica (como acontece experimentalmente), pelo que deve proceder-se à sua correcção com base na seguinte expressão (Ranta-Eskola, 1979):

$$\rho = \rho_{ext} - \frac{t}{2} , \quad (14)$$

em que  $\rho$  representa  $\rho_1$  e  $\rho_2$  e refere-se ao raio de curvatura médio, ou seja, o raio de curvatura a meia espessura da calote, sendo  $\rho_{ext}$  o raio de curvatura na face exterior da calote.

No caso geral de uma chapa anisotrópica, a equação (11) contém duas variáveis,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , cuja determinação necessita de uma equação suplementar. No caso de uma chapa obedecendo ao critério de Hill'48, esta equação suplementar, pode ser obtida com recurso às relações tensão – deformação em regime plástico (iguais às equações (7),

mas assumindo que os eixos principais de tensão ( $O_{123}$ ) e de anisotropia ( $O_{xyz}$ ) da chapa coincidem):

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = d\lambda[H(\sigma_1 - \sigma_2) + G(\sigma_1 - \sigma_3)] \\ d\varepsilon_2 = d\lambda[F(\sigma_2 - \sigma_3) + H(\sigma_2 - \sigma_1)] \end{cases} \quad (15)$$

No ensaio de expansão biaxial de uma chapa, pode assumir-se que  $\sigma_3 = 0$ , sendo possível conhecer experimentalmente a razão entre as deformações principais,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , que se mantém constante durante o ensaio ( $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}$ ). Assim, com base nas equações (15) pode escrever-se:

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{\sigma_1(G + H) - \sigma_2H}{-\sigma_1H + \sigma_2(F + H)} \quad (16)$$

Deste modo, com base nas equações (11) e (16) é possível determinar as tensões principais,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , supondo conhecidos os parâmetros,  $F$ ,  $G$  e  $H$  do critério de Hill'48.

É agora possível calcular, os valores da tensão,  $\bar{\sigma}$ , e da deformação,  $\bar{\varepsilon}$ , equivalentes recorrendo ao critério de Hill'48, admitindo que são conhecidos os parâmetros de anisotropia,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , através das seguintes equações (ver por exemplo: Hill (1950) e Rees (1995)):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 - 2H\sigma_1\sigma_2} \quad (17)$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{F \left[ \frac{G\varepsilon_2 - H\varepsilon_3}{FG + GH + HF} \right]^2 + G \left[ \frac{F\varepsilon_1 - H\varepsilon_3}{FG + GH + HF} \right]^2 + H \left[ \frac{F\varepsilon_1 - G\varepsilon_2}{FG + GH + HF} \right]^2} \quad (18)$$

No caso de materiais isotrópicos, obedecendo ao critério de von Mises, durante o ensaio de expansão biaxial em matriz circular e elíptica, as tensões principais,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , podem ser calculadas através das equações (11) e da simplificação da equação (16):

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{\sigma_1 - 0,5\sigma_2}{-0,5\sigma_1 + \sigma_2} \quad (19)$$

Do mesmo modo, a tensão e a deformação equivalentes, podem ser calculadas recorrendo às equações simplificadas seguintes (von Mises):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2} , \quad (20)$$

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2} . \quad (21)$$

Finalmente, no caso de um ensaio com matriz circular, para materiais com comportamento completamente isotrópico (von Mises, por exemplo) ou anisotrópicos (Hill'48, por exemplo) com isotropia apenas no plano da chapa, as tensões principais são iguais ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ), o mesmo acontecendo com as deformações ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ) e com os raios de curvatura ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ), permitindo assim simplificar a expressão (11):

$$\sigma = \frac{p\rho}{2t} . \quad (22)$$

Neste caso, a equação (22) é suficiente para determinar as tensões principais no plano da chapa ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ), não sendo necessária uma equação suplementar. Além disso, para materiais com comportamento completamente isotrópicos as equações (20) e (21) podem simplificar-se (von Mises):

$$\bar{\sigma} = \sigma \text{ e } \bar{\varepsilon} = -\varepsilon_3 . \quad (23)$$



## 4. MATERIAIS ESTUDADOS

Recentemente, foi realizado um trabalho respeitante à simulação numérica do ensaio de expansão biaxial em matriz circular de materiais isotrópicos (Reis et al., 2011b), com diversos parâmetros da lei de encruamento de Swift (fazendo variar a tensão limite de elasticidade e o coeficiente de encruamento). Efectua-se agora um estudo sobre chapas anisotrópicas, apresentando ou não isotropia de propriedades no seu plano (obedecendo a uma mesma lei de encruamento), submetidas a ensaios de expansão em matriz circular e matriz elíptica.

Na Tabela 1 estão indicadas as simulações utilizadas neste estudo, com os respectivos parâmetros do critério de plasticidade Hill'48. Em todos os casos, assume-se que a curva tensão – deformação equivalente dos materiais é representada pela curva de tracção a zero graus com o eixo  $Ox$  (condição  $G + H = 1$ ). Em todos os casos, os parâmetros da lei de encruamento de Swift ( $\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n$ ) são: tensão limite de elasticidade  $\sigma_0 = 200 \text{ MPa}$ , coeficiente de encruamento  $n = 0,20$  e  $K = 577,08 \text{ MPa}$  ( $\varepsilon_0 = 0,005$ ). As propriedades elásticas dos materiais são sempre iguais: módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,30$ . Como referido, aquando da descrição da modelação do ensaio, a espessura da chapa é 1mm.

Nesta tabela a designação  $A\_B\_C$  indica que a anisotropia do material é tal que os coeficientes de anisotropia,  $r(\alpha)$ , no plano da chapa são  $r(\alpha = 0^\circ) = A$ ,  $r(\alpha = 45^\circ) = B$  e  $r(\alpha = 90^\circ) = C$ . Assim, quando  $A = B = C$ , o material é isotrópico no plano da chapa (qualquer plano perpendicular a  $Oxy$  é plano de simetria de propriedades); quando  $A = C \neq B$ , o material apresenta simetria em relação a um plano perpendicular ao plano da chapa que faz  $45^\circ$  com  $Ox$  (e com  $Oy$ ); se  $A \neq B \neq C$ , o material é completamente anisotrópico, isto é apenas os planos  $Oxy$ ,  $Oxz$  e  $Oyz$  são planos de simetria de propriedades.

Em resumo, para este estudo foram seleccionados materiais com três tipos diferentes de anisotropia: (i) isotrópicos no plano da chapa:  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ ; (ii) com anisotropia no plano da chapa, apresentando simetria em relação a um plano perpendicular ao plano da chapa, que faz  $45^\circ$  com  $Ox$  (e com  $Oy$ ):  $r(\alpha = 0^\circ) =$

$r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (iii) com anisotropia completa:  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .

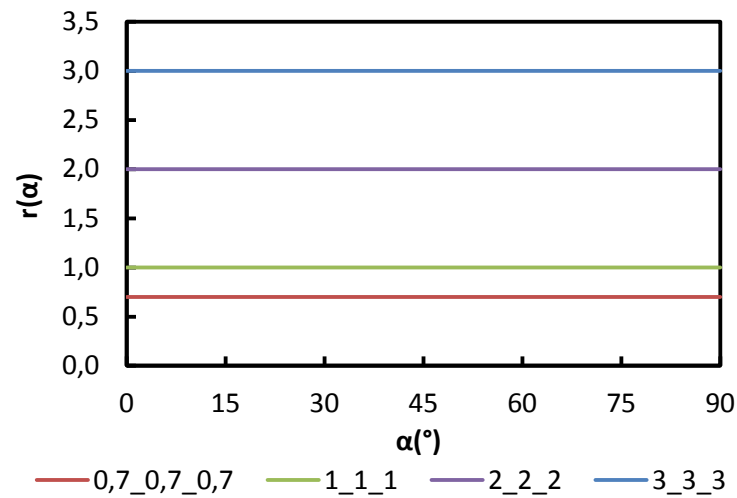
**Tabela 1.** Simulações numéricas, designações dos materiais e parâmetros do critério Hill'48.

Simulação	Designação	Critério de Plasticidade: Hill'48					
		F	G	H	L	M	N
a)	0,7_0,7_0,7	0,588	0,588	0,412	1,500	1,500	1,412
b)	1_1_1*	0,500	0,500	0,500	1,500	1,500	1,500
c)	2_2_2	0,333	0,333	0,667	1,500	1,500	1,667
d)	3_3_3	0,250	0,250	0,750	1,500	1,500	1,750
e)	3_1,5_3	0,250	0,250	0,750	1,500	1,500	1,000
f)	1,5_3_1,5	0,400	0,400	0,600	1,500	1,500	2,800
g)	0,6_3_0,6	0,625	0,625	0,375	1,500	1,500	4,375
h)	3_0,6_3	0,250	0,250	0,750	1,500	1,500	0,550
i)	0,6_0,7_0,8	0,469	0,625	0,375	1,500	1,500	1,313
j)	0,6_1,8_3	0,125	0,625	0,375	1,500	1,500	1,725
k)	1,5_2,25_3	0,200	0,400	0,600	1,500	1,500	1,650
l)	1,5_2,75_4	0,150	0,400	0,600	1,500	1,500	1,788

\*Os resultados em seguida apresentados respeitantes a este caso foram obtidos com base num trabalho anteriormente realizado (Reis et al., 2011b), tendo sido novamente analisados, de acordo com a metodologia utilizada neste trabalho para os restantes materiais.

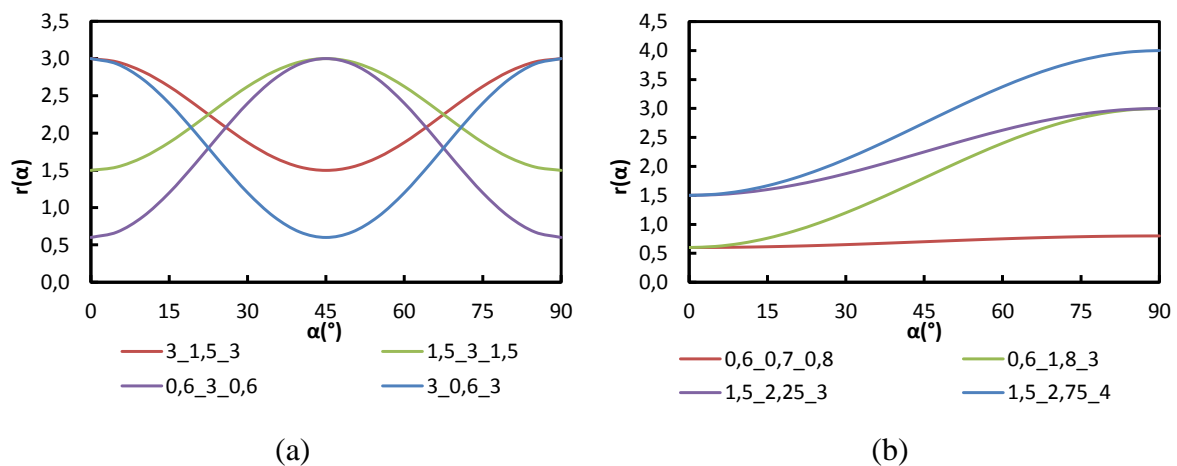
No caso de isotropia de propriedades no plano da chapa, foram seleccionados materiais cujo valor do coeficiente de anisotropia no plano da chapa é inferior, igual e superior a 1 (simulações a), b), c) e d) da Tabela 1). Na situação de anisotropia no plano da chapa, foram escolhidos materiais apresentando (simulações e), f), g) e h) da Tabela 1) ou não (simulações i), j), k) e l) da Tabela 1) simetria de propriedades em relação a um plano que faz ângulos de  $45^\circ$  com os eixos principais de anisotropia,  $0x$  e  $0y$ . Em três casos, dois com simetria (simulações g) e h)) e um sem simetria (simulação j)), em relação ao plano que faz  $45^\circ$  com  $0x$  e  $0y$ , o valor do coeficiente de anisotropia evolui, no plano da chapa, entre valores inferiores e superiores a 1. Foram também consideradas amplitudes diferentes de propriedades entre 0 e  $45^\circ$  (nos casos em que  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ) e entre 0 e  $90^\circ$  (nos casos em que  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ).

A Figura 6 mostra os valores do coeficiente de anisotropia,  $r(\alpha)$  no plano da chapa correspondente às simulações dos materiais com isotropia neste plano.



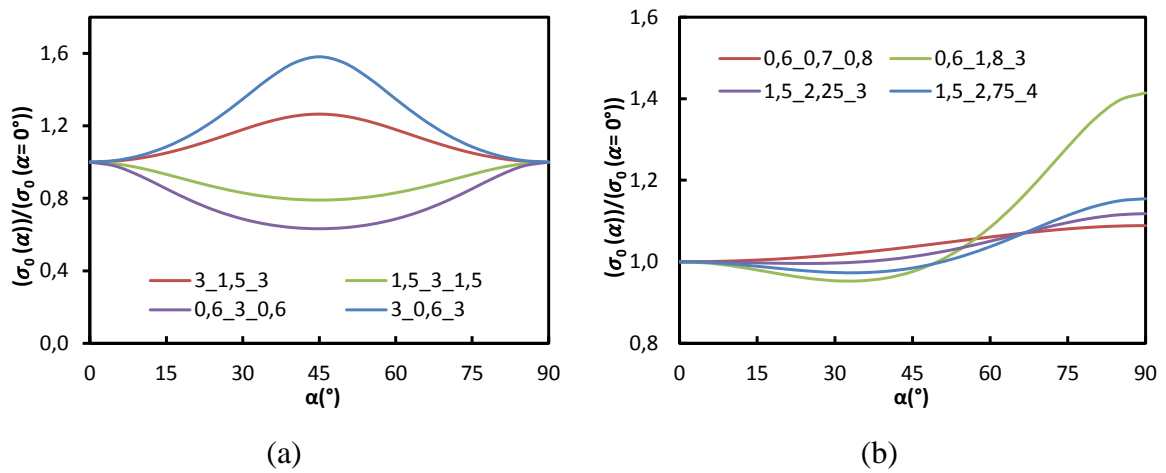
**Figura 6.** Coeficiente de anisotropia  $r(\alpha)$ , no plano da chapa, respeitante aos materiais com isotropia neste plano.

A Figura 7 mostra a evolução do coeficiente de anisotropia,  $r(\alpha)$ , no plano da chapa dos materiais correspondentes às simulações dos materiais anisotrópicos neste plano.



**Figura 7.** Distribuição de  $r(\alpha)$  no plano da chapa, respeitante aos materiais com anisotropia neste plano: (a)  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b)  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .

Para um melhor entendimento do estado de anisotropia destes últimos materiais, na Figura 8 mostram-se as evoluções da razão  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$ , entre a tensão limite de elasticidade,  $\sigma_0(\alpha)$ , segundo  $\alpha$  um ângulo qualquer no plano da chapa, e a tensão limite de elasticidade segundo  $0x$ ,  $\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$ , em função do ângulo  $\alpha$ .



**Figura 8.** Distribuição de  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha=0^\circ)$  no plano da chapa, respeitante aos materiais com anisotropia neste plano: (a)  $r(\alpha=0^\circ) = r(\alpha=90^\circ) \neq r(\alpha=45^\circ)$ ; (b)  $r(\alpha=0^\circ) \neq r(\alpha=45^\circ) \neq r(\alpha=90^\circ)$ .

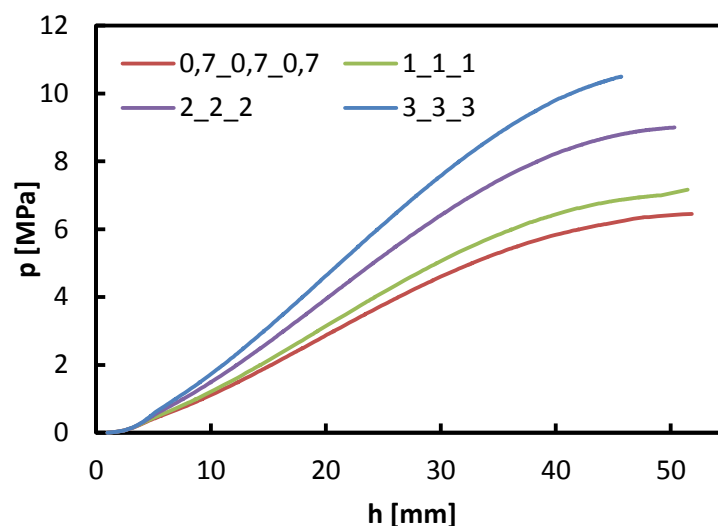


## 5. MATRIZ CIRCULAR

Neste capítulo analisam-se resultados obtidos no ensaio de expansão em matriz circular, para materiais com a mesma lei de encruamento, mas diferente tipos de anisotropia, segundo Hill'48. O objectivo é realizar um estudo sistemático, sobre a influência da anisotropia da chapa na adequada determinação da lei de encruamento com base na teoria da membrana, ou seja, de modo idêntico ao procedimento experimental.

### 5.1. Isotropia no plano da chapa

Os primeiros casos estudados, dizem respeito a materiais com isotropia no plano da chapa (simulações a), b), c) e d) da Tabela 1). A Figura 9 apresenta a evolução da pressão com a altura do pólo, para os casos de isotropia no plano da chapa, evidenciando comportamentos que dependem do valor de  $r(\alpha)$ . Quanto maior é o coeficiente de anisotropia, maior é a pressão necessária para atingir a altura máxima de pólo.



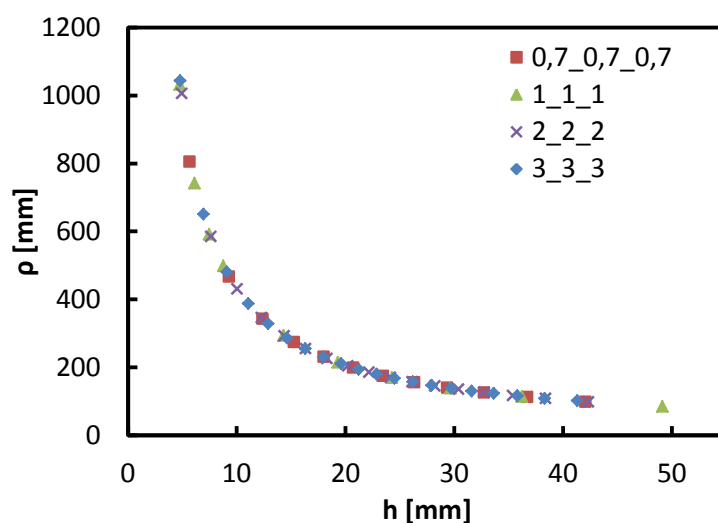
**Figura 9.** Evolução da pressão,  $p$ , com a altura do pólo,  $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa.

Na Tabela 2 mostram-se a pressão e a altura máximas no pólo, definidas como sendo o valor da pressão, cuja diferença relativamente ao valor de pressão do incremento anterior é inferior a 0,001 MPa, e a altura correspondente, respectivamente.

**Tabela 2.** Altura e pressão máximas no pólo para os materiais com isotropia no plano da chapa.

Simulação	Designação	$h_{\text{máx}}$ [mm]	$p_{\text{máx}}$ [MPa]
a)	0,7_0,7_0,7	51,83	6,45
b)	1_1_1	51,50	7,16
c)	2_2_2	50,33	8,96
d)	3_3_3	45,70	10,38

A Figura 10 mostra a evolução do raio de curvatura da calote esférica em função da altura do pólo, para os casos da Tabela 2 (ver também Figura 6). O raio de curvatura da calote foi analisado somente segundo o eixo  $Ox$ , devido à simetria geométrica e de propriedades destas simulações. Os resultados parecem indicar que uma única curva descreve o comportamento dos materiais, ou seja, para cada valor de altura de pólo, os raios de curvatura são idênticos em todos os ensaios.

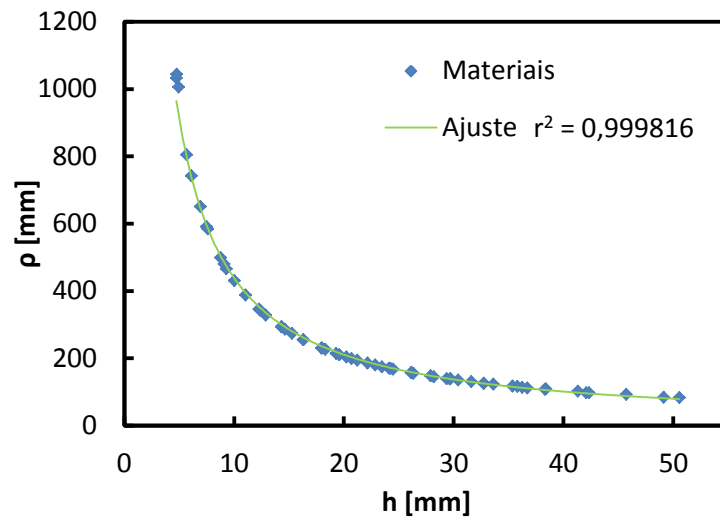
**Figura 10.** Evolução do raio de curvatura,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa.

Resultados recentes (Reis et al., 2011b) mostraram que é possível descrever convenientemente a evolução do raio de curvatura da calote em função da altura de pólo através de uma lei de potência, para materiais completamente isotrópicos (von Mises), obedecendo à lei de Swift. Assim, para testar a possibilidade de uma lei de potência descrever também o comportamento que se mostra na Figura 10, foi realizada uma regressão aos resultados desta figura, utilizando a seguinte lei de potência proposta por Reis et al. (2011b):

$$\rho = a(h - b)^c , \quad (24)$$

em que,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros de ajuste.

A Figura 11 mostra a curva de ajuste a todos os resultados da Figura 10 e o respectivo coeficiente de correlação, indicando um bom ajuste da equação (24) aos resultados numéricos.



**Figura 11.** Evolução do raio de curvatura,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , para os materiais com isotropia no plano da chapa (símbolos), e a respectiva equação de ajuste (linha).

A equação de ajuste obtida foi:

$$\rho = 3235,48(h - 1,4204)^{-0,9414} . \quad (25)$$

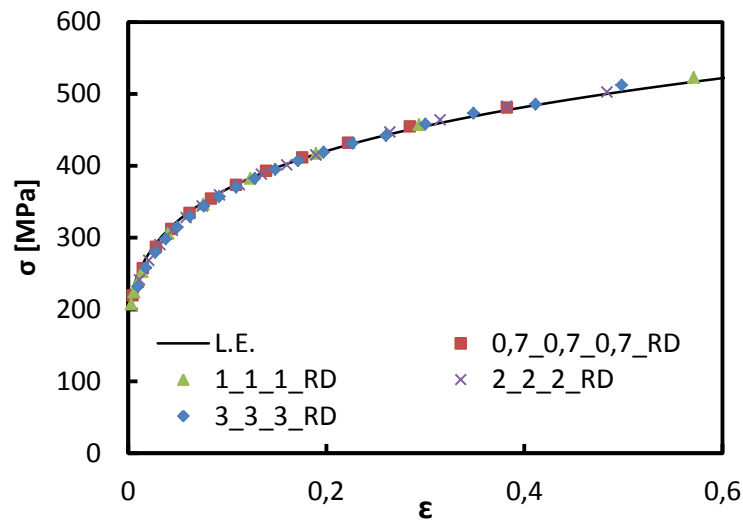
Esta equação permite determinar o raio de curvatura em função altura do pólo, para qualquer material isotrópico no plano da chapa e obedecendo à equação de Swift, cujos parâmetros são referidos no Capítulo 4. Ou seja, o raio de curvatura pode ser determinado de uma forma simplificada, sem recorrer ao método tradicional, que consiste em estimar o raio de curvatura, a valores sucessivos de pressão durante o ensaio, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*.

A seguir analisam-se os resultados do traçado das curvas tensão-deformação equivalentes dos materiais isotrópicos no plano da chapa. Assim, compara-se a curva tensão – deformação equivalente introduzida nas simulações numéricas (curva de referência) com os pontos obtidos a partir dos resultados das simulações (apenas pontos com valores de deformação equivalente superior a 0,05 foram considerados, em todo o

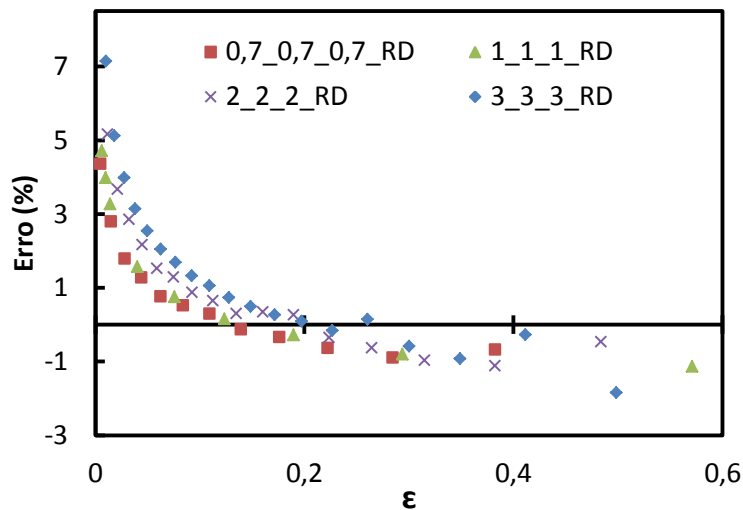
trabalho). Em todos os casos, a tensão equivalente foi determinada a partir do valor da tensão  $\sigma$ , obtido pela equação (22).

Nas seis figuras seguintes, Figura 12 a Figura 17, os valores da tensão e da deformação equivalentes no pólo foram determinados supondo conhecidos os parâmetros do critério de Hill'48, que são indicados na Tabela 1, e recorrendo às equações (17) e (18), respectivamente (a partir daqui designa-se por  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , a tensão e deformação equivalentes anteriormente designadas por  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\varepsilon}$ ). Nas Figura 18 e Figura 19 os valores de tensão,  $\sigma$ , e deformação,  $\varepsilon$ , equivalentes foram determinados segundo von Mises, equações (23), isto é supondo os materiais completamente isotrópicos.

Na Figura 12 comparam-se as curvas tensão – deformação equivalentes dos materiais isotrópicos no plano da chapa obtidas com base na teoria da membrana, com a curva de referência, cujos parâmetros da lei de Swift foram escolhidos como dados de entrada no programa DD3IMP. Nesta figura, a designação “\_RD” indica que o raio de curvatura, que permitiu estabelecer o valor da tensão no pólo, foi determinado directamente, analisando os resultados numéricos da simulação do ensaio de expansão a sucessivas alturas de pólo, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*. A Figura 13 mostra a evolução dos erros, relativos à tensão, em função da deformação equivalente. Em todos os casos, no início da deformação, os valores da tensão determinados são inferiores aos da lei de encruamento. Este comportamento tende a inverter-se para valores de deformação entre 0,15 e 0,20, acima dos quais o erro relativo não ultrapassa 2%. No início da deformação, o erro aproxima-se de 5% (num ponto ultrapassa mesmo 7%). Este erro, relativamente elevado, está associado à imprecisão associada à medição do raio de curvatura quando a calote esférica apresenta uma altura de pólo muito reduzida e ao facto da deformação medida incluir as componentes elástica e plástica, sendo a primeira componente significativa no início da deformação. Porém, a importância relativa da componente elástica da deformação atenua-se obviamente durante o ensaio.



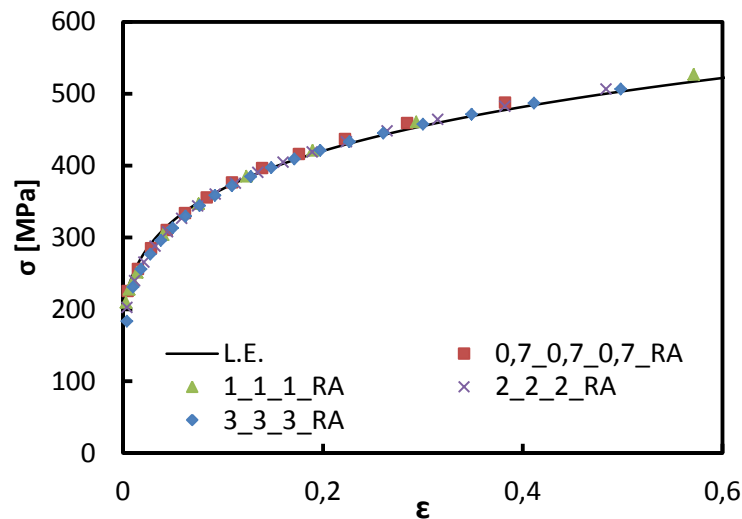
**Figura 12.** Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).



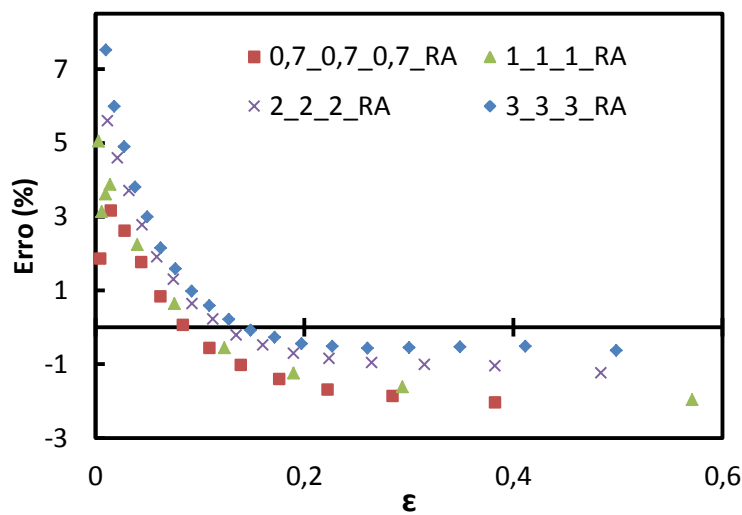
**Figura 13.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Na Figura 14, comparam-se as curvas de encruamento dos materiais isotrópicos no plano da chapa, determinadas utilizando a equação de ajuste referida anteriormente (equação (25)), com a curva de referência (L.E.), cujos parâmetros da lei de Swift foram escolhidos como dados de entrada no programa DD3IMP. Nesta figura, a designação “\_RA” indica que o raio de curvatura foi obtido com recurso à lei de potência ajustada a todos os resultados referentes aos materiais isotrópicos no plano da chapa. A Figura 15 mostra a evolução correspondente do erro, relativo à tensão, em função da deformação equivalente. Como anteriormente (Figura 13), os valores de erro mais elevados

surgem para pequenos valores de deformação. Porém, de um modo geral, os erros são ligeiramente superiores neste caso, embora nunca ultrapassem 3%, para grandes valores de deformação, e 6% (8% num caso), para pequenos valores de deformação.



**Figura 14.** Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (25) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.), para materiais isotrópicos no plano da chapa.



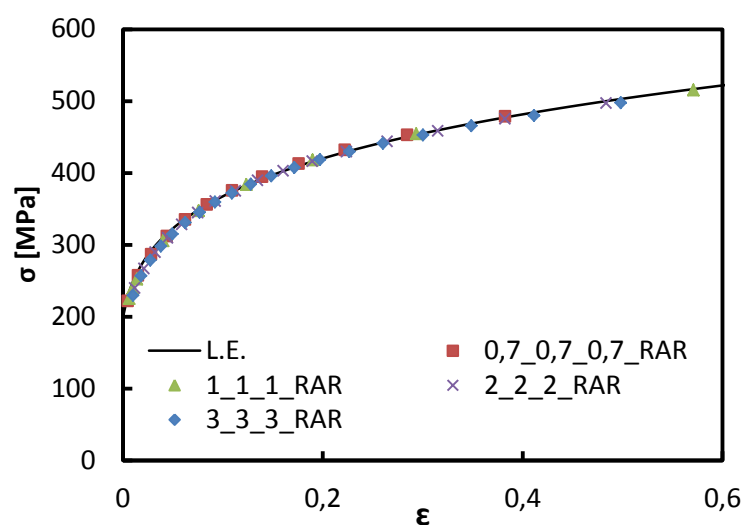
**Figura 15.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de ajuste com base na equação (25), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Para examinar a possibilidade de a evolução do raio de curvatura no pólo em função da respectiva altura poder ser descrita, no caso presente, de modo idêntico ao de materiais completamente isotrópicos, testou-se também uma equação anteriormente proposta por Reis et al. (2011b) para materiais com coeficiente de encruamento  $n = 0,20$ ,

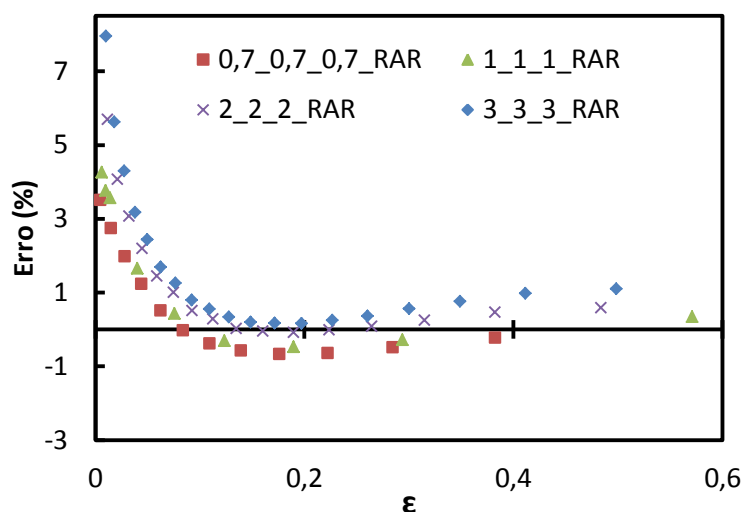
como os utilizados neste estudo. De facto, este autor concluiu que, em materiais completamente isotrópicos, a geometria do embutido, para uma dada altura de pólo, depende apenas ligeiramente do coeficiente de encruamento do material e é independente do valor da tensão limite de elasticidade. Transcreve-se em seguida a referida equação (Reis et al., 2011b):

$$\rho = 3759,99(h - 0,9353)^{-0,9836} . \quad (26)$$

Neste contexto, traçou-se também a curva de tensão – deformação equivalente de materiais anisotrópicos com isotropia de propriedades no plano da chapa. Na Figura 16 comparam-se as curvas de encruamento dos materiais isotrópicos no plano da chapa, determinadas com recurso à equação (26), com a respectiva lei de encruamento (L.E.). Nesta figura, é adicionada a designação “\_RAR” para indicar que o raio de curvatura foi obtido, com recurso à lei de potência ajustada por Reis et al. (2011b), isto é utilizando a equação (26). A Figura 17 mostra a evolução correspondente do erro, relativo à tensão, em função da deformação equivalente. Como anteriormente, os valores de erro mais elevados surgem para pequenos valores de deformação. De modo geral, os erros são ligeiramente inferiores aos obtidos com recurso à equação (25) (ver Figura 15)), não ultrapassando 1% acima de 0,10 de deformação equivalente, e equiparáveis aos obtidos directamente, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* (ver Figura 13)).



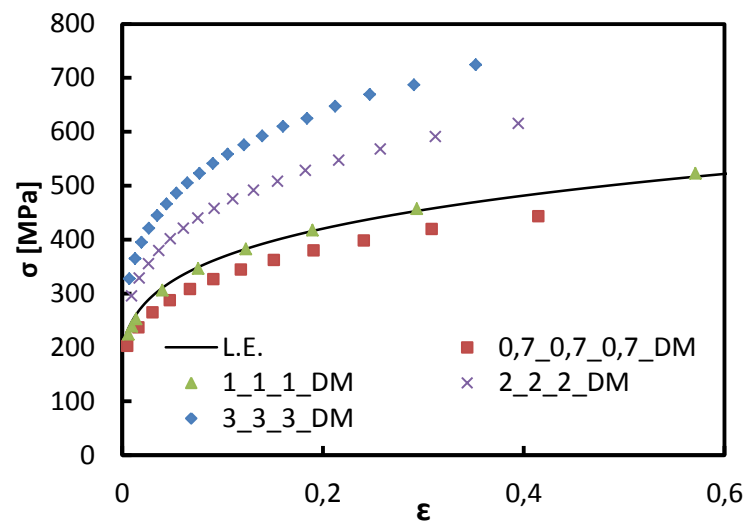
**Figura 16.** Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.), para materiais isotrópicos no plano da chapa.



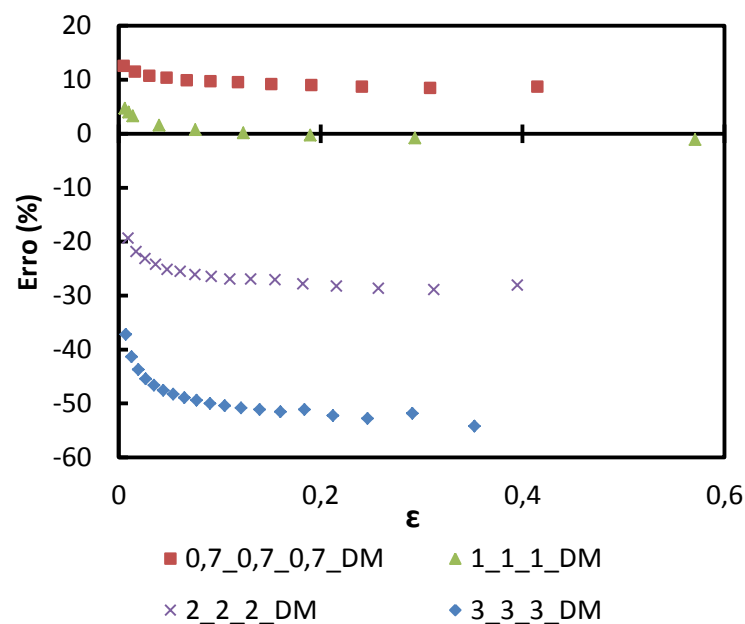
**Figura 17.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Finalmente, para os materiais anisotrópicos com isotropia de propriedades no plano da chapa, foram traçadas as curvas tensão – deformação equivalentes como é feito habitualmente, no desconhecimento dos parâmetros do critério de anisotropia a que obedece o material. Isto é, os valores da tensão e da deformação foram determinados segundo von Mises, equações (23). Na Figura 18, comparam-se as curvas assim obtidas com a lei de encruamento dos materiais (L.E.). A designação “\_DM” indica que as curvas de encruamento foram determinadas segundo von Mises, utilizando os valores do raio de curvatura determinados directamente, analisando os resultados numéricos da simulação do ensaio de expansão a sucessivas alturas de pólo, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*. Como se constata facilmente da Figura 18, as curvas de encruamento, segundo von Mises, afastam-se significativamente da lei de encruamento, com excepção do material isotrópico (1\_1\_1). A Figura 19 mostra a evolução do erro correspondente, relativo à tensão, em função da deformação. Esta figura mostra que o erro atinge valores elevados, que aumentam à medida que o coeficiente de anisotropia se afasta de 1. De facto, os valores do erro atingem valores na ordem dos 10, 25 e 50%, quando o coeficiente de anisotropia no plano tem valores de 0,7, 2,0 e 3,0 respectivamente. Ou seja, não faz sentido comparar os resultados de encruamento obtidos no ensaio de tracção uniaxial com os obtidos no ensaio de expansão biaxial de chapas anisotrópicas, sem tornar em consideração a anisotropia do material.





**Figura 18.** Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).

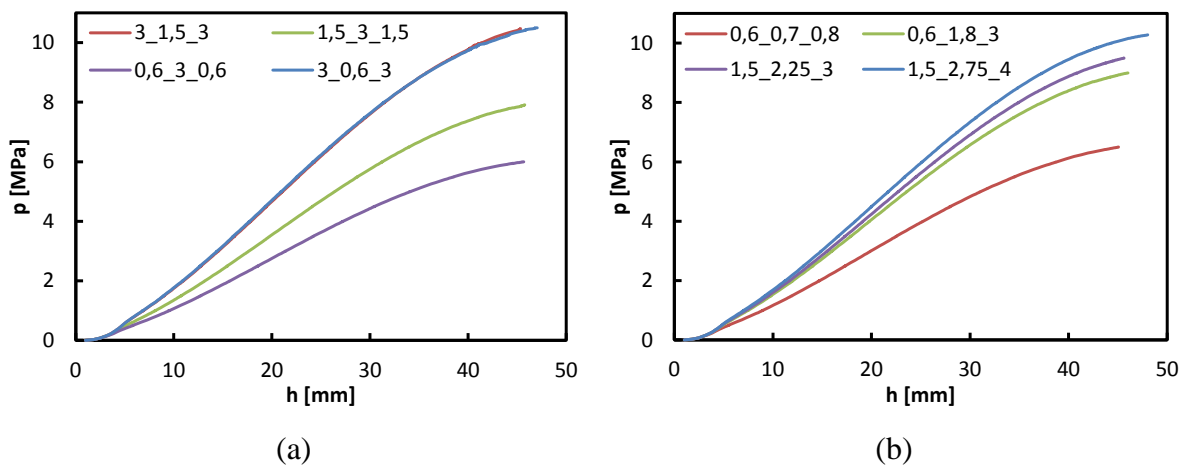


**Figura 19.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

O facto, geralmente observado (Fernandes, 1984), das curvas tensão – deformação equivalentes em tracção biaxial serem muito diferentes das determinadas em tracção uniaxial está de acordo com os resultados numéricos mostrados nas duas figuras precedentes, isto é, que foram obtidos considerando o material isotrópico.

## 5.2. Anisotropia no plano da chapa

Nesta secção, são analisados os resultados obtidos para os materiais com anisotropia no plano da chapa (simulações e), f), g), h), i), j), k) e l) da Tabela 1). A Figura 20 apresenta a evolução da pressão com a altura do pólo, para materiais evidenciando diferentes comportamentos que dependem da distribuição  $r(\alpha)$ , no plano da chapa.



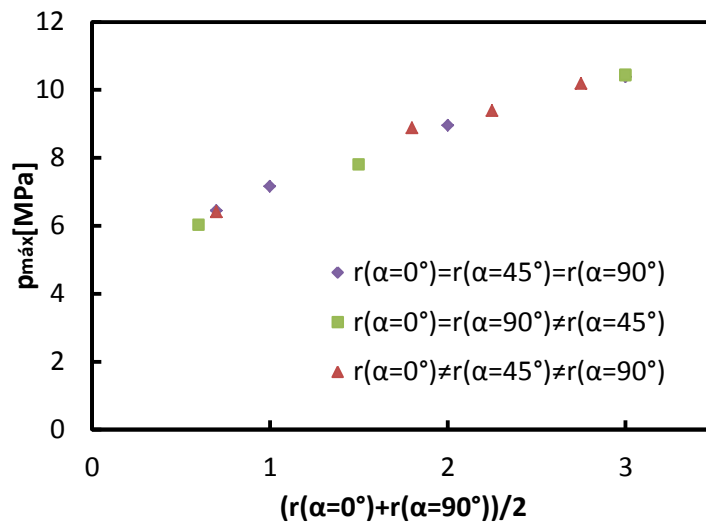
**Figura 20.** Evolução da pressão,  $p$ , com a altura do pólo,  $h$ : (a) para chapas com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b) para chapas com  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .

Na Tabela 3 mostram-se a pressão e a altura máximas do pólo, definidas como sendo o valor da pressão, cuja diferença relativamente ao valor de pressão do incremento anterior é inferior a 0,001 MPa, e a altura correspondente, respectivamente. Nesta tabela indicam-se também os valores médios de  $r(\alpha)$  e da razão  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$ , no plano da chapa ( $r(\alpha)_{\text{médio}}$  e  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)_{\text{médio}}$ , respectivamente).

**Tabela 3.** Valores médios de  $r(\alpha)$ , da razão  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$  e de altura e pressão máximas no pólo, para os materiais com anisotropia no plano da chapa.

Simulação	Designação	$r(\alpha)_{\text{médio}}$	$\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)_{\text{médio}}$	$h_{\text{máx}}$ [mm]	$p_{\text{máx}}$ [MPa]
e)	3_1,5_3	2,289	1,114	45,34	10,42
f)	1,5_3_1,5	2,211	0,892	46,84	7,80
g)	0,6_3_0,6	1,737	0,796	45,68	6,02
h)	3_0,6_3	1,863	1,228	47,06	10,44
i)	0,6_0,7_0,8	0,700	1,041	45,10	6,41
j)	0,6_1,8_3	1,800	1,087	46,04	8,88
k)	1,5_2,25_3	2,250	1,037	45,66	9,39
l)	1,5_2,75_4	2,750	1,032	48,02	10,19

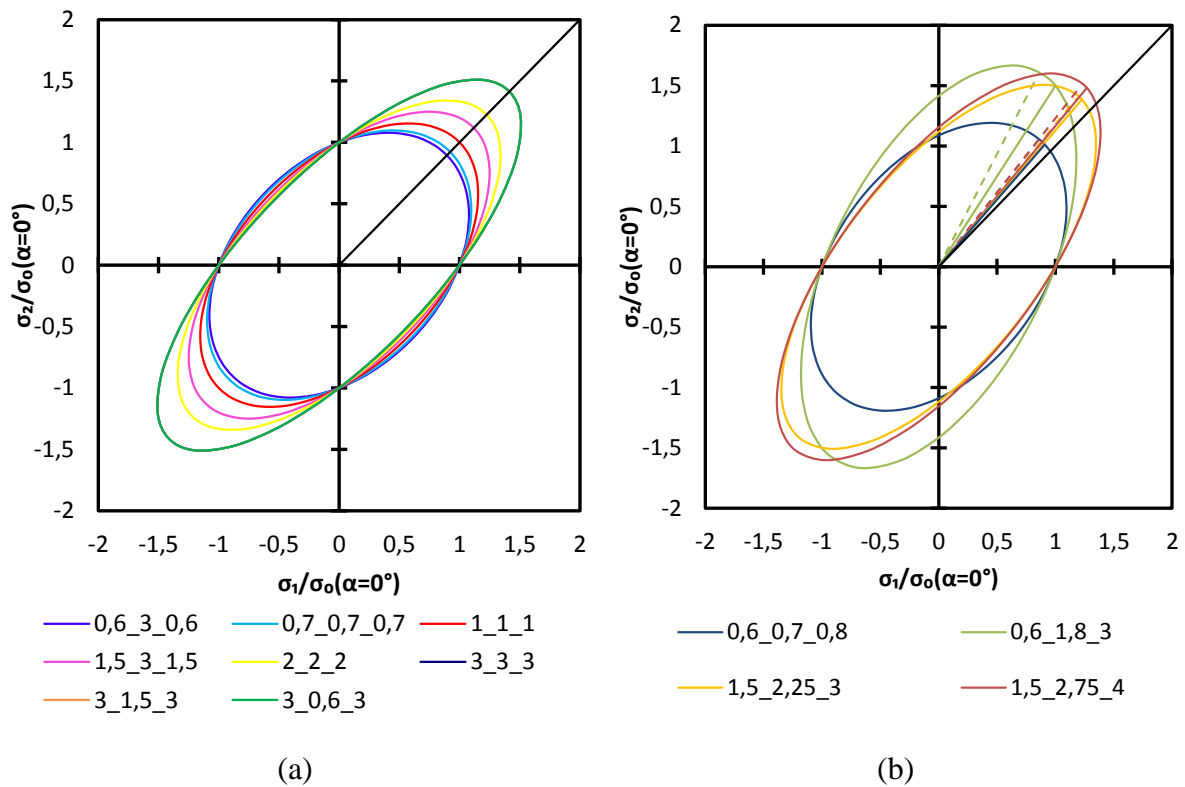
Os valores de pressão máxima,  $p_{\text{máx}}$ , dão uma indicação, ainda que qualitativa, do nível relativo das curvas de pressão, durante o ensaio. De facto, o valor correspondente,  $h_{\text{máx}}$  depende do material, embora varie numa gama estreita de valores (para as simulações da Tabela 3,  $h_{\text{máx}}$  situa-se entre aproximadamente 45 e 48 mm). Assim, o valor máximo da pressão representa *grossa modo* o nível da curva de pressão, que cresce de modo idêntico com a média dos valores dos coeficientes de anisotropia  $r(\alpha = 0^\circ)$  e  $r(\alpha = 90^\circ)$ , qualquer que seja o tipo de anisotropia dos materiais ( $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ ,  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$  e  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ), como se mostra na Figura 21. Nesta figura incluem-se também os materiais isotrópicos no plano da chapa (secção anterior). Notar que, por exemplo, as chapas 3\_3\_3 (Figura 9), 3\_1,5\_3 e 3\_0,6\_3 (Figura 20 (a)), para as quais  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) = 3$ , têm curvas de pressão coincidentes, apesar da evolução de  $r(\alpha)$  no plano da chapa não ser a mesma nos três casos. Nenhuma outra correlação, que mostre comportamento idêntico para os três tipos de materiais ( $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ ,  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$  e  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ), foi encontrada entre a pressão e  $r(\alpha)_{\text{médio}}$  ou  $\sigma_0(\alpha)/\sigma_0(\alpha = 0^\circ)_{\text{médio}}$  ou mesmo os valores médios de  $\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$  e  $\sigma_0(\alpha = 90^\circ)$ .



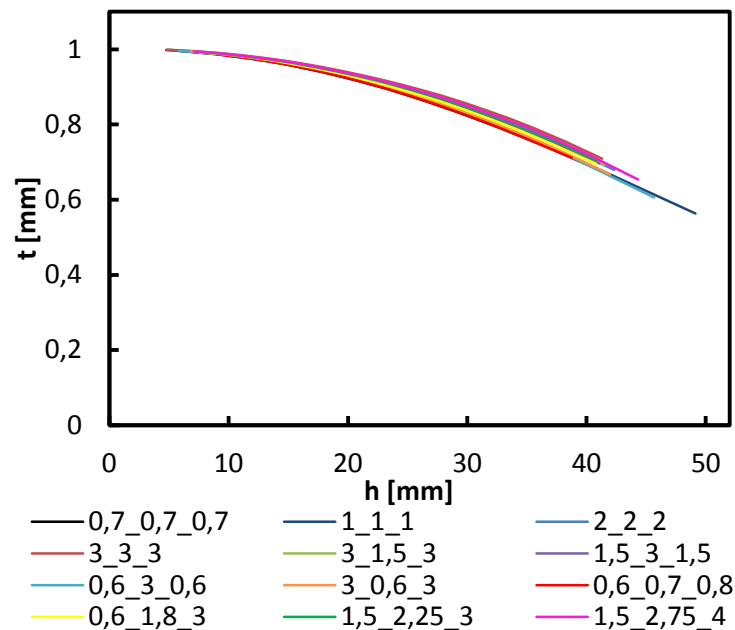
**Figura 21.** Evolução da pressão máxima em função de  $(r(\alpha = 0^\circ) + r(\alpha = 90^\circ))/2$ .

Os resultados da Figura 21 reflectem qualitativamente o nível relativo das curvas de pressão e podem explicar-se pelo facto do eixo maior da elipse do critério de Hill'48, no espaço,  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , cuja representação gráfica se mostra na Figura 22, para todos

os casos estudados, ser tanto maior quanto maiores forem os valores de  $r(\alpha = 0^\circ)$  e  $r(\alpha = 90^\circ)$ . Por exemplo, para o caso de chapas com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$  demonstra-se facilmente que em trajectória biaxial simétrica (isto é, segundo o eixo da elipse), a deformação plástica inicia-se para valores de tensão tais que  $\sigma_1/\sigma_0 (\alpha = 0^\circ) = \sigma_2/\sigma_0 (\alpha = 0^\circ) = (\sqrt{(r+1)/2})$ , em que  $r = r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ . No caso de chapas com  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ , as trajectórias de tensão em matriz circular desviam-se da trajectória biaxial simétrica, aproximando-se do eixo da elipse, como se mostra na Figura 22 (b). Assim, em ambos os casos,  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$  e  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ , durante o ensaio de expansão em matriz circular, os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  necessários para iniciar e prosseguir a deformação plástica dependem do tamanho do eixo maior da elipse, que por sua vez são função de  $r(\alpha = 0^\circ)$  e  $r(\alpha = 90^\circ)$ . Ora, as equações (11) e (22) dizem-nos que a pressão é tanto maior quanto maiores forem os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Além disso, deve referir-se que a espessura,  $t$ , e os raios de curvatura,  $\rho$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , evoluem de modo aproximadamente igual para todos os materiais com a altura de calote,  $h$ . A evolução de  $t$  com  $h$  é mostrada na Figura 23, para todos os materiais estudados. A evolução de  $\rho$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  com  $h$  é analisada mais à frente (secção 5.2.3, *Análise Final*)



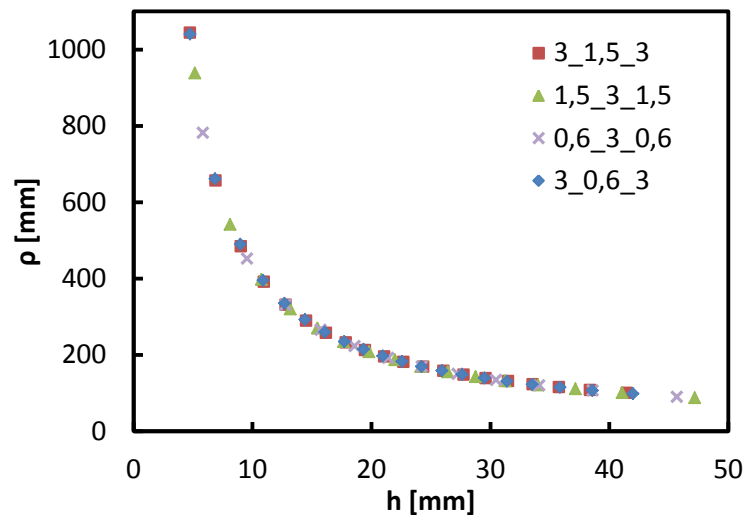
**Figura 22.** Superfícies de plasticidade dos materiais estudados: (a)  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$  e  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (b)  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ . As rectas a preto indicam a trajectória de tensão equibiaxial (que ocorre para todos os casos em (a)); as rectas a cores indicam: (i) eixo da elipse, a tracejado e (ii) trajectória de tensão, a cheio.



**Figura 23.** Evolução da espessura,  $t$ , em função da altura do pólo,  $h$ , para todos os materiais.

### 5.2.1. Lei de encruamento ( $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ )

No que diz respeito ao traçado das curvas de encruamento, analisam-se agora os casos e), f), g) e h) da Tabela 3 (ver também Figura 7 (a) e Figura 8 (a)) com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ , de modo semelhante ao realizado para os materiais isotrópicos no plano da chapa. Nestes casos, devido às simetrias geométrica e em relação ao plano perpendicular à chapa fazendo  $45^\circ$  com  $O_x$  (e com  $O_y$ ), os raios de curvatura segundo  $O_x$  e  $O_y$  são iguais ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ), para a mesma altura de pólo. Na Figura 24 mostra-se a evolução do raio de curvatura da calote esférica segundo  $O_x$ , em função da altura do pólo.



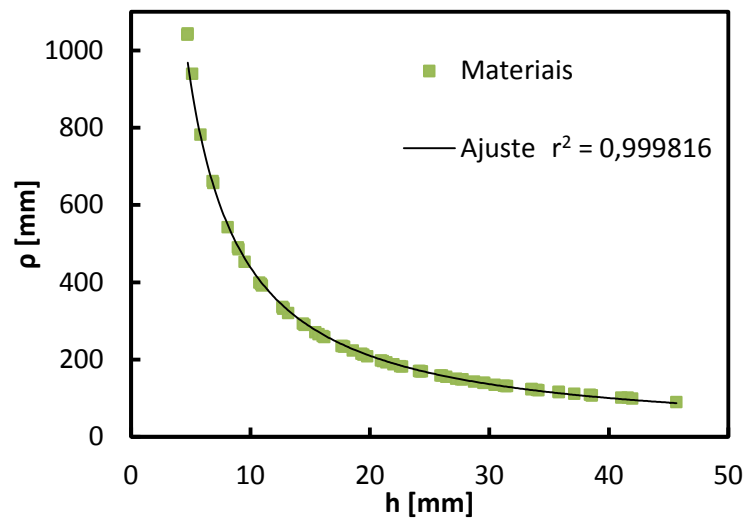
**Figura 24.** Evolução do raio de curvatura segundo  $O_x$ ,  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ , em função da altura do pólo,  $h$ .

Como anteriormente, os pares  $(\rho, h)$  calculados tendem a dispor-se segundo uma curva única, à qual foi ajustada uma lei de potência, (equação (24)), como se mostra na Figura 25. Esta figura mostra a curva ajustada a todos os resultados da Figura 24 e o coeficiente de correlação respectivo, indicando um bom ajuste.

A equação de ajuste obtida foi:

$$\rho = 3435,54(h - 1,2897)^{-0,9591} . \quad (27)$$

Esta equação permite determinar o raio de curvatura em função altura do pólo, para os materiais com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ , de uma forma simplificada.



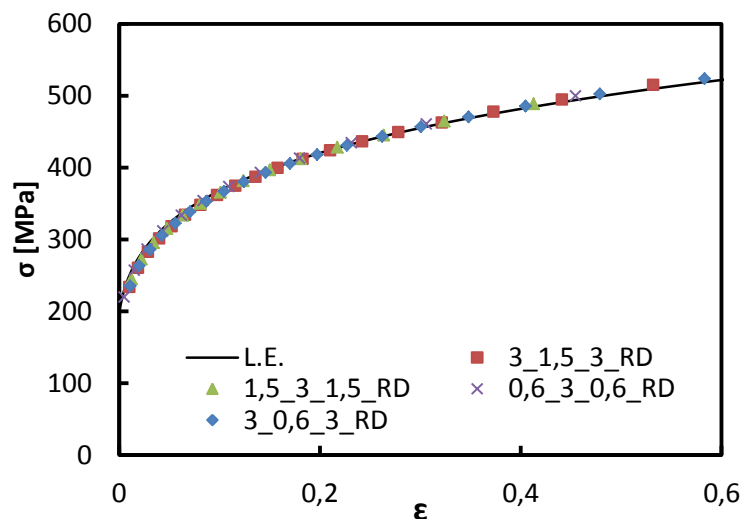
**Figura 25.** Evolução do raio de curvatura do pólo a  $0^\circ$ ,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , para os materiais em que  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ , e respectiva linha de ajuste.

A seguir analisam-se os resultados do traçado das curvas tensão-deformação equivalentes destes materiais. Assim, compara-se a curva tensão-deformação equivalente introduzida nas simulações numéricas (curva de referência) com os pontos obtidos a partir dos resultados das simulações. Em todos os casos, a tensão equivalente foi determinada a partir do valor da tensão  $\sigma$ , obtido pela equação (22), pois as tensões principais no plano da chapa,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , são iguais ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ).

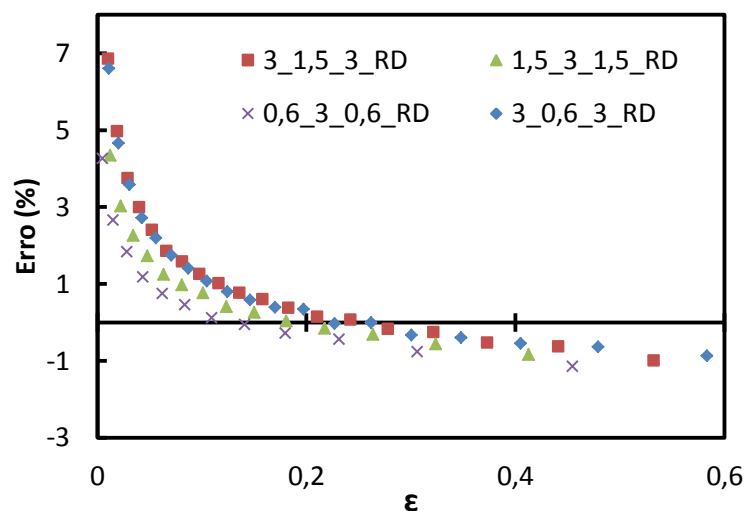
Nas seis figuras seguintes, Figura 26 a Figura 31, os valores da tensão e da deformação equivalentes no pólo foram determinados supondo conhecidos os parâmetros do critério de Hill'48, que são indicados na Tabela 1, e recorrendo às equações (17) e (18), respectivamente. Nas Figura 32 e Figura 33 os valores de tensão,  $\sigma$ , e deformação,  $\varepsilon$ , equivalentes foram determinados segundo von Mises, equações (23), isto é supondo os materiais completamente isotrópicos.

Na Figura 26 comparam-se as curvas tensão – deformação equivalentes dos materiais para os quais  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$  com a curva de referência (L.E.), cujos parâmetros da lei de Swift foram escolhidos como dados de entrada no programa DD3IMP. Na figura é adicionada a designação “\_RD” indicando que o valor do raio de curvatura, que permitiu estabelecer o valor da tensão no pólo, foi determinado directamente, analisando os resultados numéricos da simulação do ensaio de expansão a sucessivas alturas de pólo, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*. A Figura 27

mostra a evolução dos erros, relativos à tensão, em função da deformação equivalente. Em geral, os erros são idênticos aos obtidos para os materiais isotrópicos (ver Figura 12 e Figura 13).



**Figura 26.** Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).

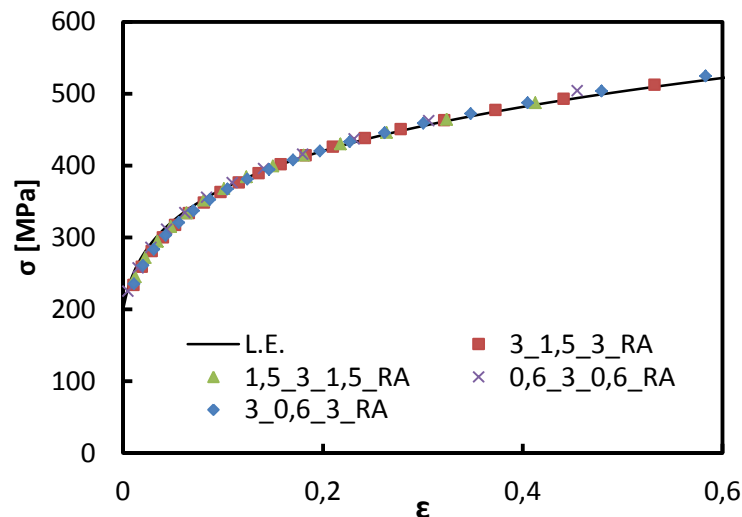


**Figura 27.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

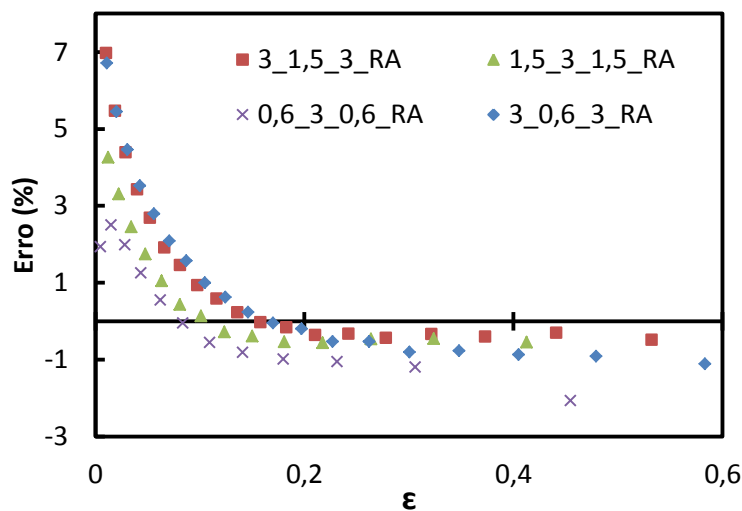
Na Figura 28 comparam-se as curvas de encruamento, determinadas utilizando a equação de ajuste (27) com a curva de referência. Na figura é adicionada a designação “\_RA” para indicar que o raio de curvatura foi calculado através da equação de ajuste (27).



A Figura 29 apresenta os erros correspondentes, relativos à tensão. Os resultados são idênticos aos anteriores, embora mantendo-se aproximadamente constantes após 0,20 de deformação (excepto num ponto).



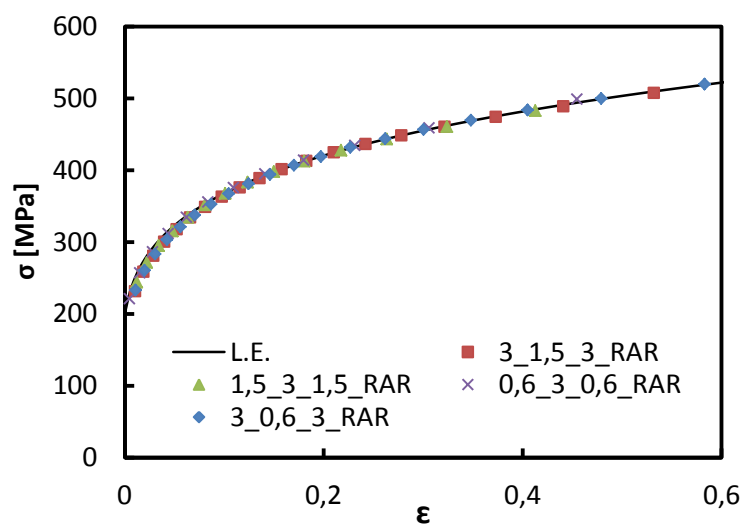
**Figura 28.** Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (27) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).



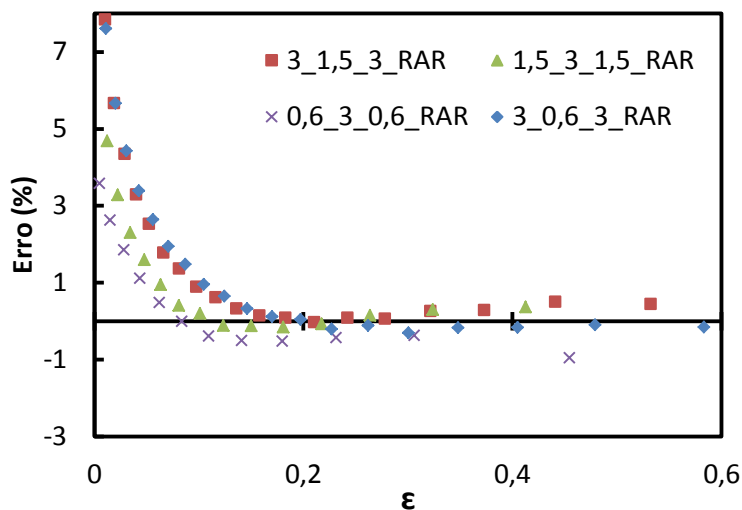
**Figura 29.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de ajuste com base na equação (27), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Utilizou-se também a equação de ajuste proposta por (Reis et al., 2011b) para materiais completamente isotrópicos (equação (26)), com o objectivo de calcular o raio de curvatura. A Figura 30 compara a lei de encruamento (L.E.) com os pontos assim determinados para as curvas de encruamento. É adicionada a designação “\_RAR” para

indicar que o raio de curvatura foi calculado através da equação de ajuste (26). A Figura 31 mostra a evolução correspondente do erro, relativo à tensão. Os valores da tensão são inferiores aos estimados pela lei de encruamento (L.E.) até cerca de 0,10 de deformação, para os materiais 3\_1,5\_3 e 1,5\_3\_1,5, e até cerca de 0,20 de deformação, para os materiais 3\_0,6\_3 e 0,6\_3\_0,6. O erro mantém-se muito próximo de zero após os 0,20 de deformação.

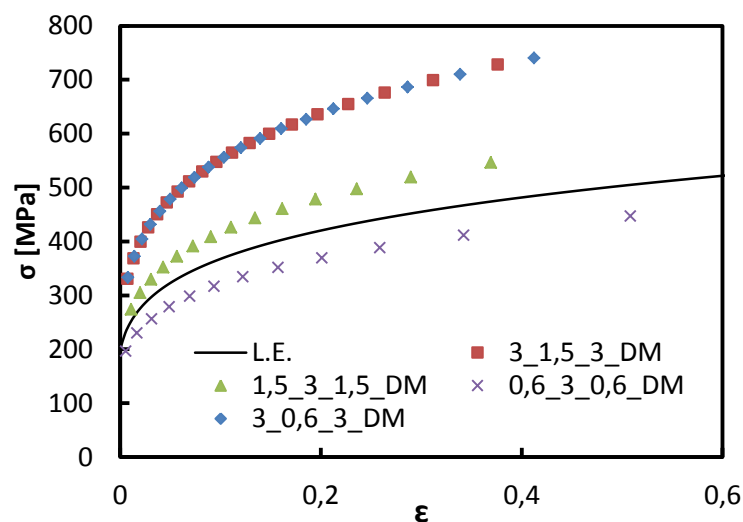


**Figura 30.** Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).

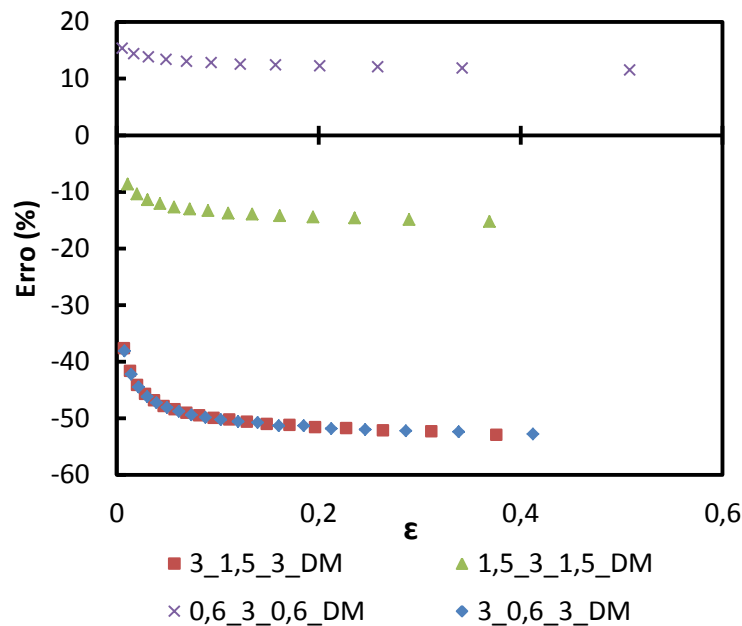


**Figura 31.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Na Figura 32 comparam-se os pontos obtidos para as curvas de encruamento, no desconhecimento dos parâmetros do critério de anisotropia (isto é, segundo o critério de von Mises), e a respectiva lei de encruamento (L.E.). É adicionada a designação “\_DM” para indicar que as tensões foram calculadas directamente, a sucessivos valores de altura de pólo, utilizando o critério de von Mises. Mais uma vez, os pontos determinados ficam afastados da lei de encruamento. A Figura 33 mostra a evolução correspondente do erro, relativo à tensão. Os erros atingem valores elevados: cerca de 12% para o caso 0,6\_3\_0,6, 14% para o caso 1,5\_3\_1,5 e 50% para os dois casos restantes.



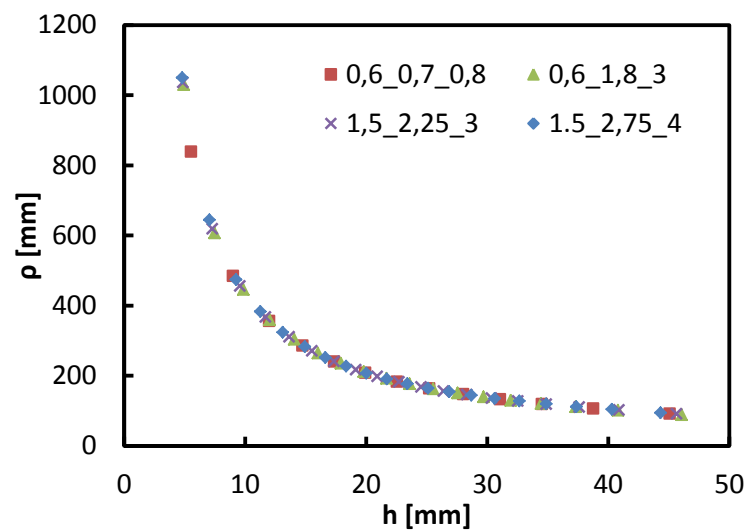
**Figura 32.** Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).



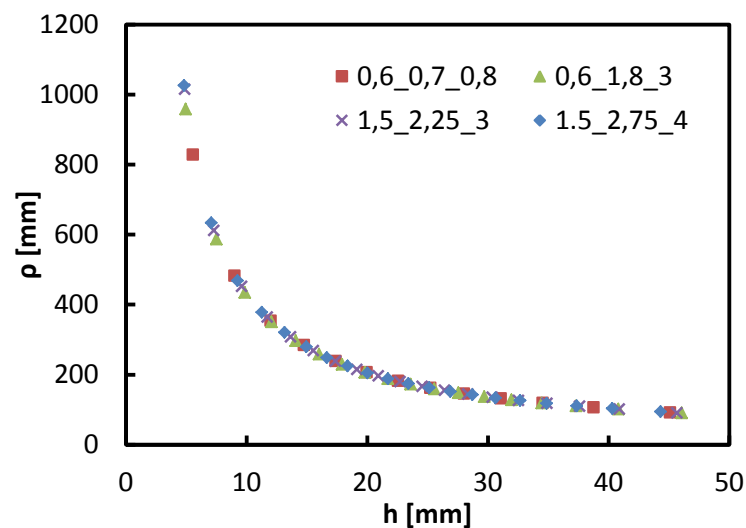
**Figura 33.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

### 5.2.2. Lei de encruamento ( $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ )

No que diz respeito ao traçado das curvas de encruamento, analisam-se agora as simulações i), j), k) e l) da Tabela 3 (ver também Figura 7 (b) e Figura 8 (b)) com  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ . Nestes casos, o estudo da evolução do raio de curvatura foi efectuado segundo direcções que fazem ângulos de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com a direcção  $Ox$ , o que se justifica pelo facto dos valores de  $r(\alpha = 0^\circ)$  e de  $\sigma_0(\alpha = 0^\circ)$  serem diferentes de  $r(\alpha = 90^\circ)$  e de  $\sigma_0(\alpha = 90^\circ)$ , respectivamente. As Figura 34 e Figura 35 mostram a evolução do raio de curvatura da calote esférica em função da altura do pólo. Em ambos os casos, os raios foram analisados com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*.

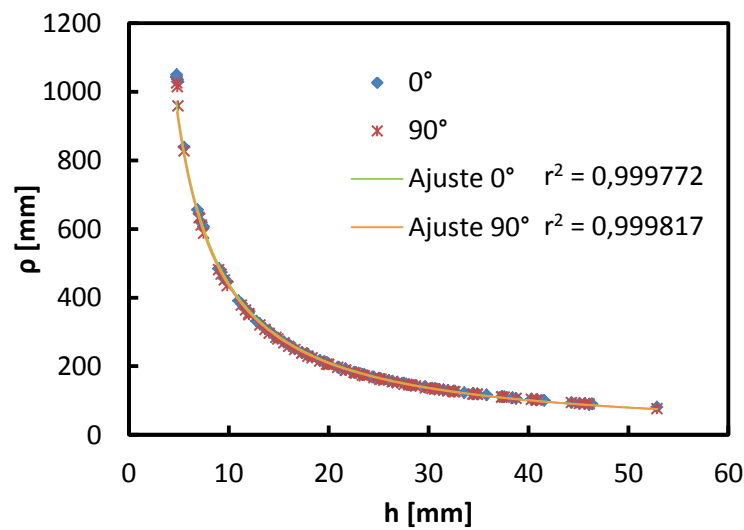


**Figura 34.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo a direcção que faz um ângulo de  $0^\circ$  com  $Ox$ .



**Figura 35.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo a direcção que faz um ângulo de  $90^\circ$  com  $Ox$ .

Em cada uma das Figura 34 e Figura 35, o comportamento parece poder ser descrito por uma única curva, pelo que os ambos os resultados foram ajustados por uma lei de potência, como se mostra na Figura 36.



**Figura 36.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo direcções que fazem ângulos de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com  $Ox$  (como nas Figuras 16 e 17), mostrando as equações de ajuste respectivas.

As equações de ajuste obtidas para  $0^\circ$  e  $90^\circ$  são, respectivamente:

$$\rho = 3263,49(h - 1,4813)^{-0,9434} , \quad (28)$$

$$\rho = 3378,27(h - 1,2817)^{-0,9555} . \quad (29)$$

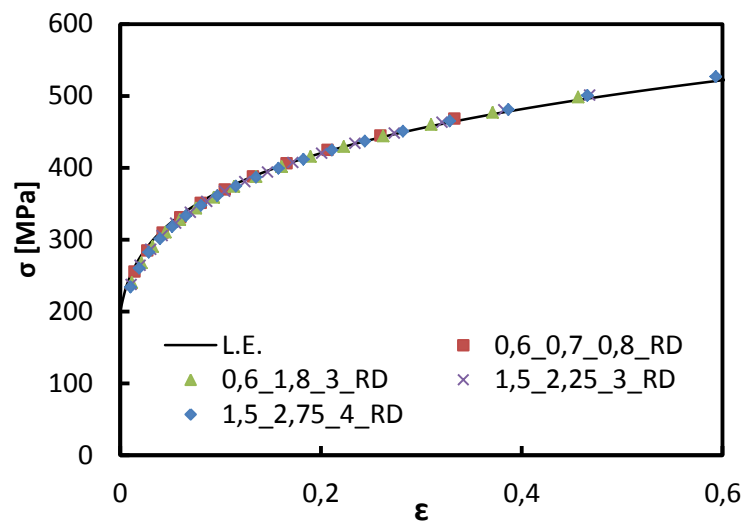
Estas equações permitem calcular os raios de curvatura em função altura do pólo, segundo direcções que fazem a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com  $Ox$ , de uma forma simplificada, sem necessidade de estimar o raio de curvatura como tradicionalmente, a diversos valores de pressão.

A seguir analisam-se os resultados do traçado das curvas tensão-deformação equivalentes destes materiais. Assim, compara-se a curva tensão-deformação equivalente introduzida nas simulações numéricas (curva de referência) com os pontos obtidos a partir dos resultados das simulações. Em todos os casos, a tensão equivalente foi determinada a partir dos valores das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , obtidos pela equação (11) e com auxílio da equação (16).

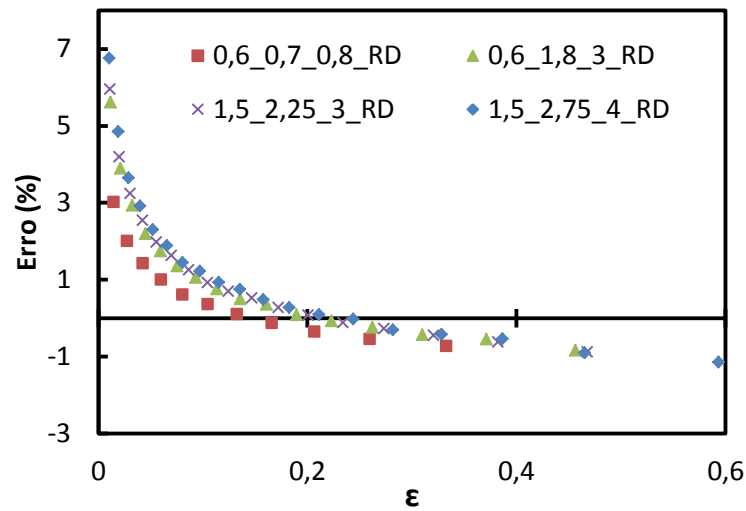
Nas seis figuras seguintes, Figura 37 a Figura 42, os valores da tensão e da deformação equivalentes no pólo foram determinados supondo conhecidos os parâmetros do critério de Hill'48, que são indicados na Tabela 1, e recorrendo às equações (17) e (18), respectivamente. A determinação das tensões principais foi realizada recorrendo à teoria da membrana: (i) com recurso ao raio de curvatura determinado a diversos momentos do ensaio, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* (Figura 37 e 38); (ii) com base nas

equações (27) e (28), que permitem determinar os raios de curvatura a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com a direcção  $Ox$  (Figura 39 e 40); (iii) com recurso à equação (26), deduzida para materiais completamente isotrópicos (Figura 41 e 42). Nas Figura 43 e 44 os valores de tensão,  $\sigma$ , e deformação,  $\varepsilon$ , equivalentes foram determinados segundo von Mises, equações (23), isto é supondo os materiais completamente isotrópicos.

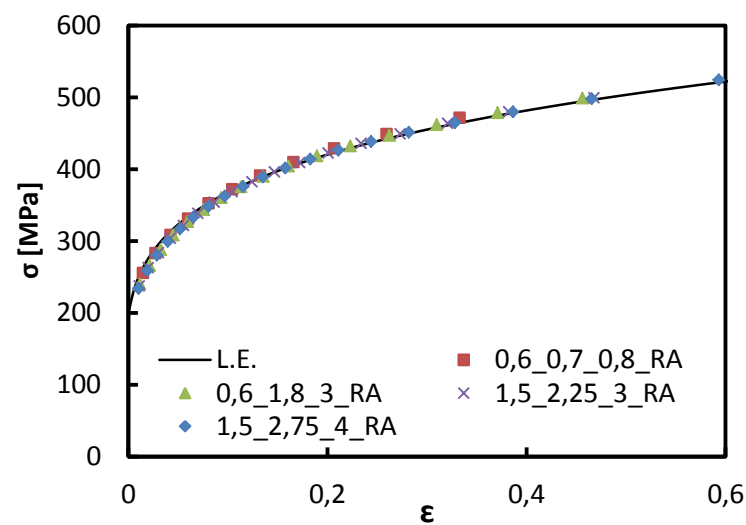
Também nestes materiais, com anisotropia no plano da chapa tal que  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ , os resultados referentes às curvas tensão – deformação equivalentes indicam valores de erro, e sua evolução com a deformação, idênticos aos materiais com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$  e com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ , tratados em secções anteriores, qualquer que seja o procedimento para determinar a tensão equivalente.



**Figura 37.** Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).

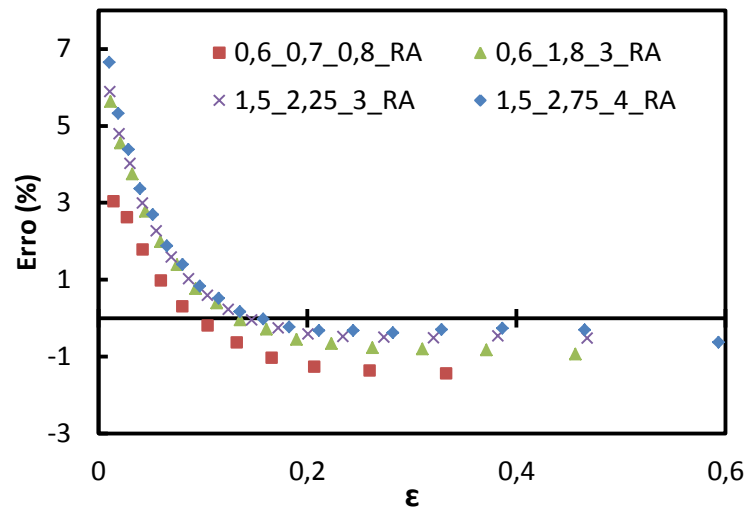


**Figura 38.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

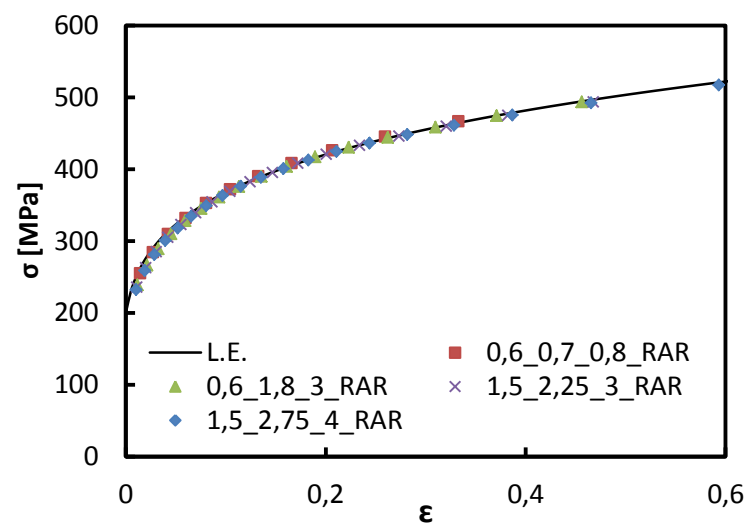


**Figura 39.** Comparação da curva de encruamento, determinando os raios de curvatura com base nas equações (28) e (29) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).

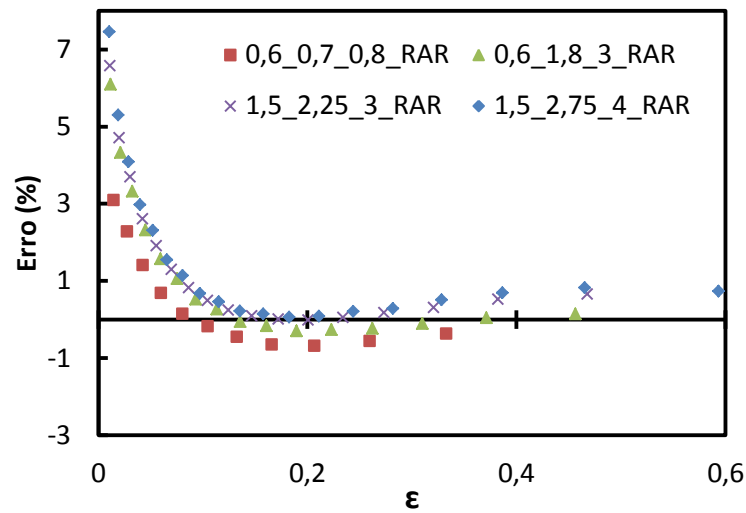




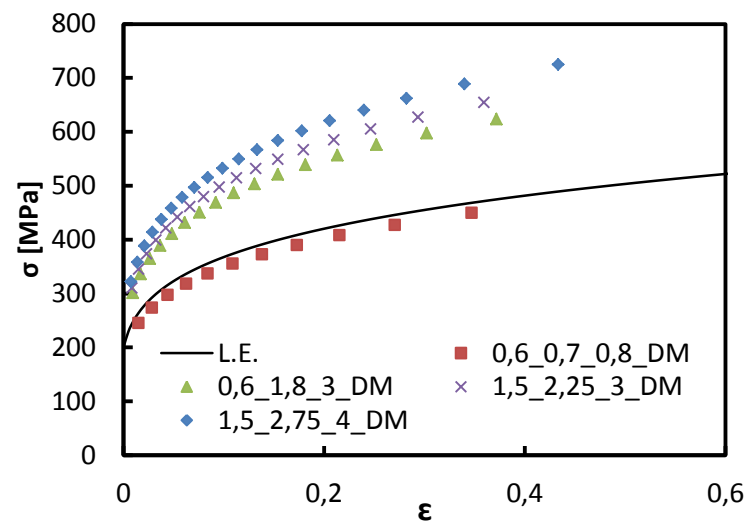
**Figura 40.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base na análise pela teoria da membrana e nas equações (28) e (29), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .



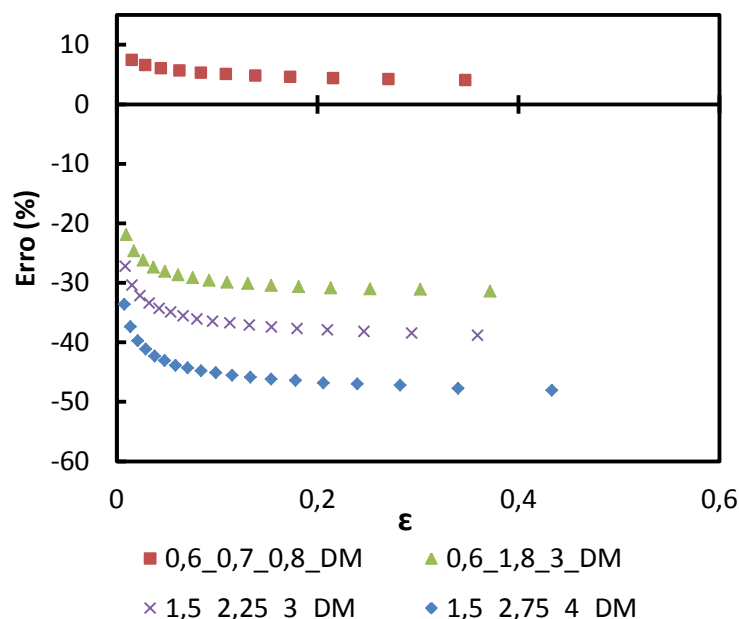
**Figura 41.** Comparação da curva de encruamento, determinando o raio de curvatura com base na equação (26) (símbolos) com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).



**Figura 42.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando o raio de curvatura com base na equação (26), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .



**Figura 43.** Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).



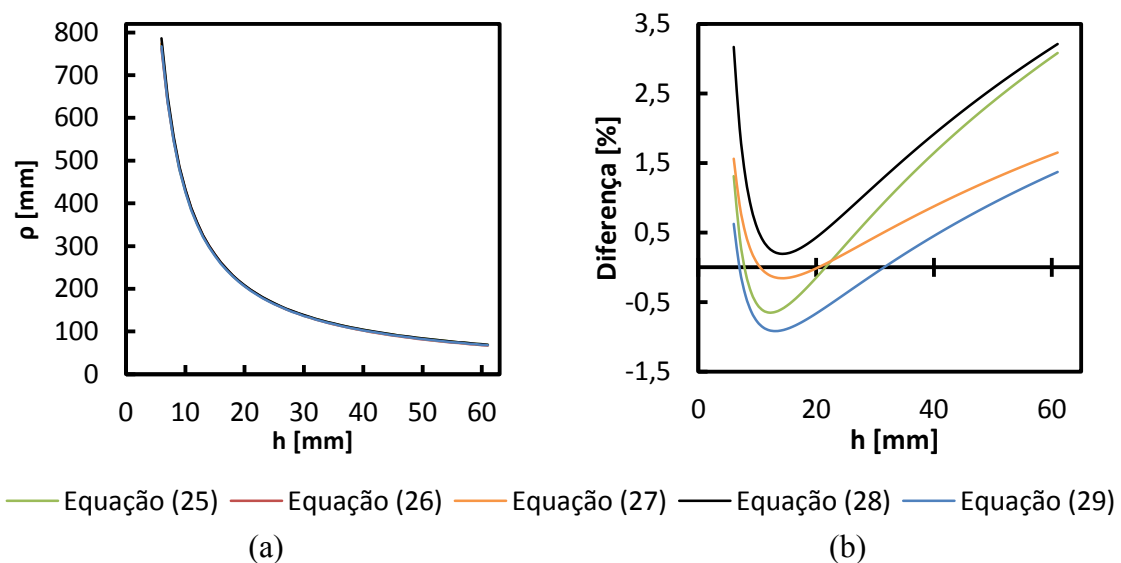
**Figura 44.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

### 5.2.3. Lei de Encruamento – Análise final

Foi apresentado neste capítulo um estudo sistemático sobre o ensaio de expansão em matriz circular de materiais com o mesmo coeficiente de encruamento e diversos tipos de anisotropia. Pode concluir-se que a utilização da equação (26), proposta por Reis et al. (2011b) para determinar os raios de curvatura em função da altura de pólo, ou eventualmente de outra do mesmo tipo (equação de potência) ajustada a todos os resultados agora apresentados e também aos de Reis et al. (2011b), permite determinar a lei de encruamento com exactidão análoga à obtida quando os raios de curvatura são determinados directamente dos resultados do ensaio, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*. Deste modo, este último procedimento tradicionalmente utilizado em situações experimentais, pode ser substituído com vantagem por uma simples equação de potência (do tipo da equação (26)). De facto, a utilização da equação (26) torna o procedimento mais expedito do que a metodologia tradicional, sendo porém necessário atender a três aspectos: (i) a equação (26) ou outras do mesmo tipo necessitam de confirmação experimental, uma vez que os resultados apresentados por Reis et al. (2011b) e os da presente dissertação foram obtidos numericamente; (ii) a equação (26) é válida para materiais com o mesmo coeficiente de encruamento ( $n = 0,20$ ) ou próximos, independentemente do valor da tensão limite de elasticidade (Reis et al., 2011b), pelo que é

necessário dispor de uma estimativa do valor do coeficiente de encruamento do material a ensaiar; (iii) a correcta determinação da curva de encruamento necessita do conhecimento dos parâmetros do critério de plasticidade, que descreve o comportamento da chapa.

Na Figura 45 representam-se graficamente as equações de potência ajustadas neste capítulo e a equação (26) (Reis et al., 2011b), e mostram-se as diferenças relativas entre os valores de pressão obtidos com as primeiras equações e os obtidos com a de Reis et al. (2011b), a diversos valores de altura de pólo (as curvas da Figura 45 (a) são difíceis de distinguir, mesmo quando traçadas numa figura com a largura desta página). Os resultados da Figura 45 ilustram a conclusão expressa no parágrafo anterior, que realçam a capacidade de uma curva única descrever com suficiente exactidão a evolução da pressão com a altura de pólo, em materiais com o mesmo coeficiente de encruamento, independentemente da anisotropia da chapa.



**Figura 45.** (a) Representação gráfica das equações de potência ajustadas neste capítulo e da equação (26) (Reis et al., 2011b); (b) Diferenças relativas entre as primeiras e a equação (26).

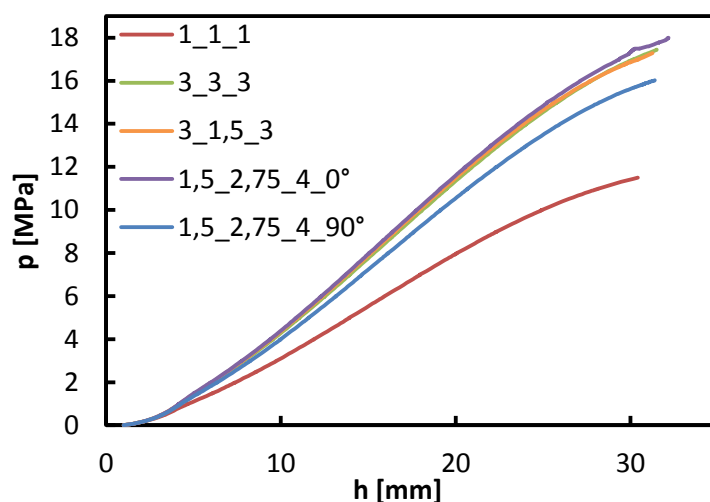
## 6. MATRIZ ELÍPTICA

Neste capítulo, são analisados os resultados de ensaios realizados em matriz elíptica. Apenas foram ensaiados alguns materiais da Tabela 1. Assim, escolheram-se quatro materiais, um de cada tipo de anisotropia (simulações b), d), e) e l) da Tabela 1): (i) completamente isotrópico; (ii) isotrópico no plano da chapa com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) = 3$ ; (iii) com  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; e (iv) com  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ . Os três primeiros casos foram ensaiados apenas com a direcção de laminagem ( $DL$ ) paralela ao eixo maior da matriz (ver Figura 1 (b)), uma vez que devido à simetria de propriedades das chapas, os resultados são idênticos se  $DL$  for paralelo ao eixo maior ou menor da matriz. No último caso, ( $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ ), os ensaios foram realizados com a direcção de laminagem paralela aos eixos maior e menor da matriz, agora referidos como simulações l-1) e l-2) (ou designados por 1,5\_2,75\_4\_0° e 1,5\_2,75\_4\_90°), respectivamente.

A Figura 46 apresenta a evolução da pressão com a altura do pólo para os materiais ensaiados em matriz elíptica. Também para esta geometria de matriz, os materiais 3\_3\_3 e 3\_1,5\_3 apresentam curvas quase coincidentes, o que se relaciona com o facto das superfícies de plasticidade serem coincidentes (no sistema de eixos  $O_{123}$ ), assim como as respectivas trajectórias de tensão, como se mostra na Figura 47 (a). Esta figura permite comparar as trajectórias de tensão em matriz elíptica com as da matriz circular (trajectória equibiaxial). Porém, das simulações 1,5\_2,75\_4\_0° e 1,5\_2,75\_4\_90° resultaram curvas diferentes entre si, tendo a primeira um nível mais elevado do que a segunda, o que se compreende devido ao facto das trajectórias de tensão serem diferentes, como se mostra na Figura 47 (b). Esta figura permite ainda comparar as trajectórias de tensão: (i) em matriz elíptica com a direcção de laminagem paralela ao eixo maior da elipse; (ii) em matriz elíptica com a direcção de laminagem paralela o eixo menor da elipse; (iii) e em matriz circular.

Em todos os casos das Figura 47 (a) e (b) as trajectórias de tensão são relativamente próximas, quando comparando as de matriz elíptica com as de matriz circular, para o mesmo material. Porém, o mesmo não acontece com as trajectórias de

deformação, como se mostra na Figura 48. Nesta figura observa-se que as trajectórias de deformação em matriz elíptica e em matriz circular podem ser relativamente afastadas, para o mesmo material. Além disso, as trajectórias em matriz elíptica afastam-se da linearidade, a partir de valores de deformações equivalentes da ordem de 0,30. Isto tem como consequência um afastamento dos valores das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  obtidas pela teoria da membrana em relação às obtidas pelo programa *DD3IMP*, após aquele valor de deformação. Porém, a tensão equivalente apresenta ainda um valor de erro aceitável para valores elevados de deformação, como se mostrará mais à frente.

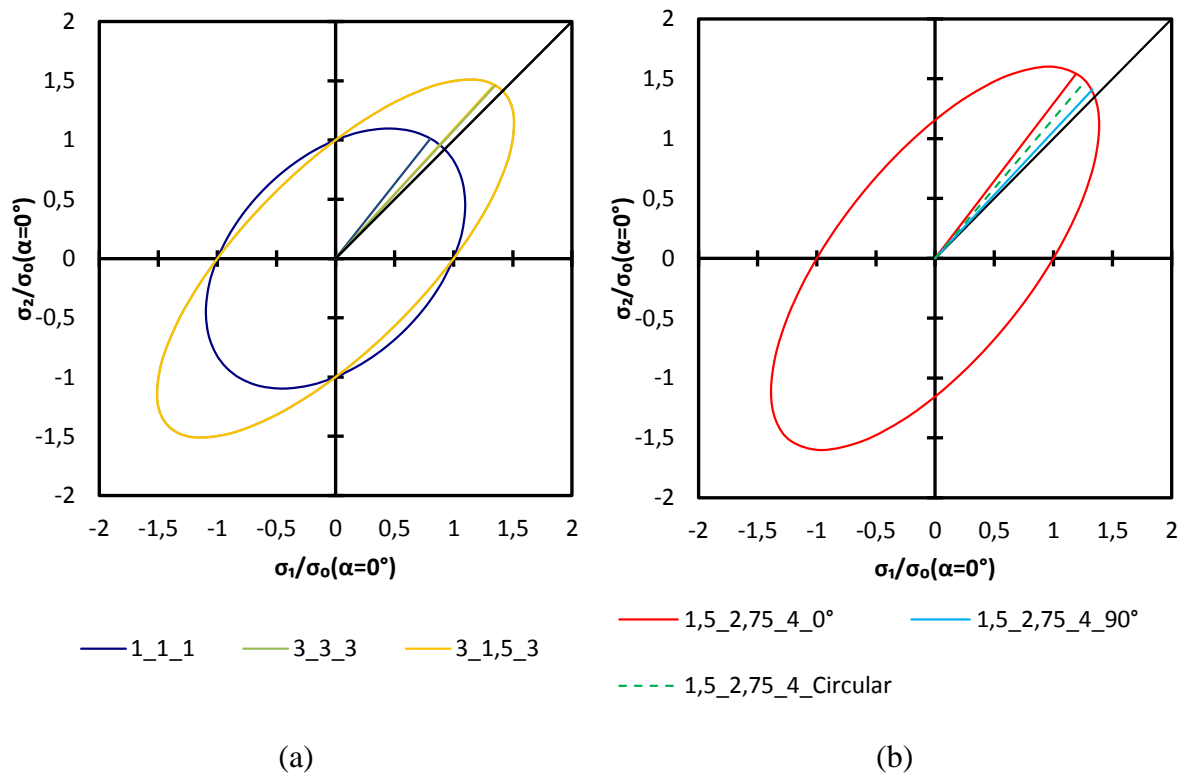


**Figura 46.** Evolução da pressão,  $p$ , com a altura do pólo,  $h$  (matriz elíptica).

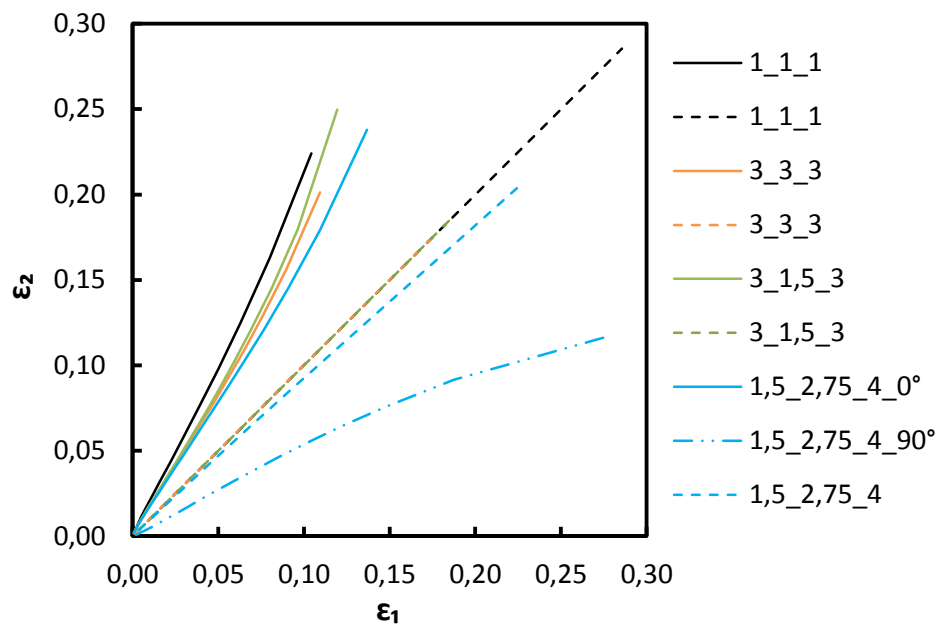
Na Tabela 4 mostra-se a altura e pressão máximas no pólo para cada material, definidas como no capítulo anterior.

**Tabela 4.** Altura e pressão máximas no pólo, para os ensaios em matriz elíptica.

Simulação	Designação	$h_{\text{máx}}$ [mm]	$p_{\text{máx}}$ [MPa]
b)	1_1_1	30,42	11,49
d)	3_3_3	31,51	17,45
e)	3_1,5_3	31,26	17,28
l-1)	1,5_2,75_4_0°	32,18	18,05
l-2)	1,5_2,75_4_90°	31,40	16,00

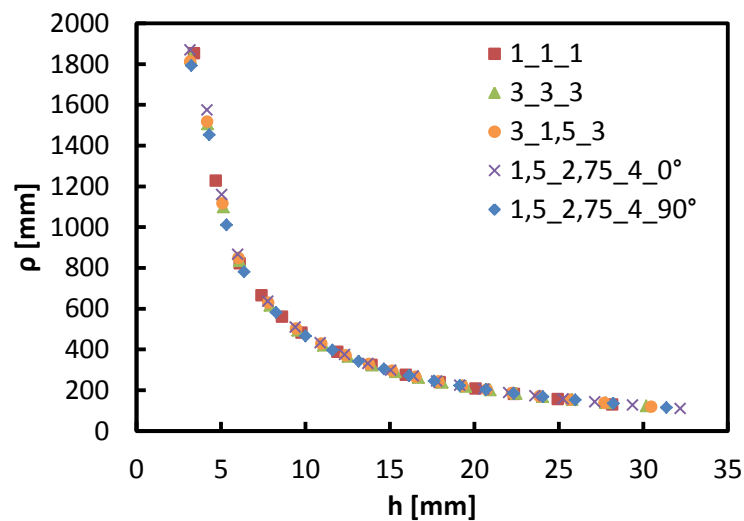


**Figura 47.** Superfícies de plasticidade dos materiais ensaiados em matriz elíptica. As rectas a cores indicam as trajectórias de tensão; a recta a preto indica a trajectória de tensão equibiaxial.

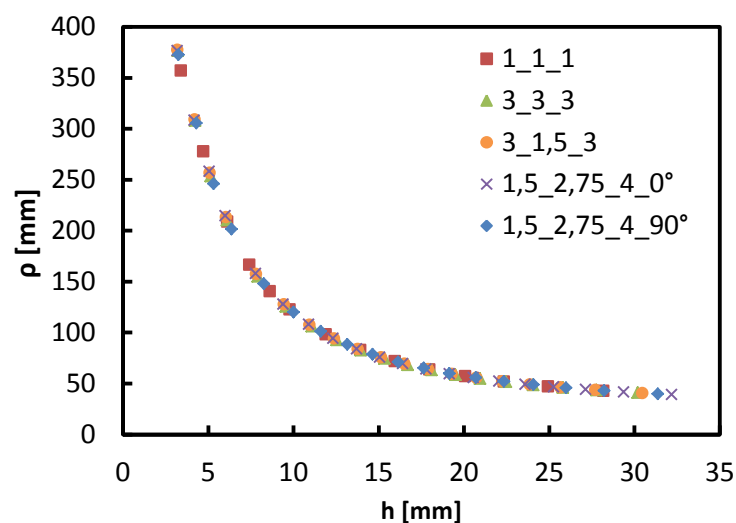


**Figura 48.** Trajectórias de deformação. As rectas a cheio e tracejado com dois pontos representam as simulações em matriz elíptica; as rectas a tracejado representam simulações em matriz circular.

No caso da matriz elíptica, o estudo da evolução do raio de curvatura da calote em função da altura de pólo foi realizado segundo duas direcções no plano da chapa paralelas aos eixos maior e menor da matriz, devido à falta de simetria circular. As Figura 49 e 50 apresentam a evolução do raio de curvatura da calote em função da altura do pólo, segundo aquelas duas direcções (eixos maior e menor, respectivamente). Em ambos os casos, os raios foram analisados com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*.



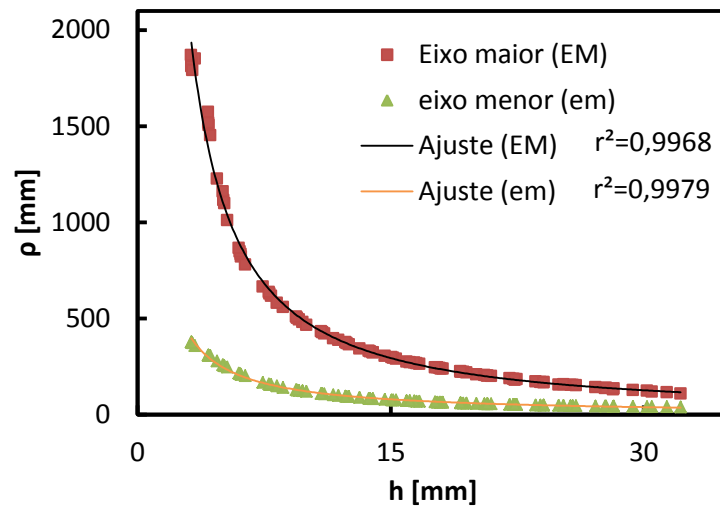
**Figura 49.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo a direcção do eixo maior da matriz.



**Figura 50.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo a direcção do eixo menor da matriz.



Em cada uma das figuras anteriores, os resultados tendem a descrever uma curva única como anteriormente, pelo que os resultados foram ajustados por uma lei de potência (equação (24)), como se mostra na Figura 51. Nestes casos, o valor do coeficiente de correlação é ligeiramente inferior aos dos casos do Capítulo 5, mas ainda indicando um bom ajuste.



**Figura 51.** Evolução do raio de curvatura do pólo,  $\rho$ , em função da altura do pólo,  $h$ , segundo as direcções dos eixos maior (EM) e menor (em) da matriz, mostrando os respectivos coeficientes de correlação.

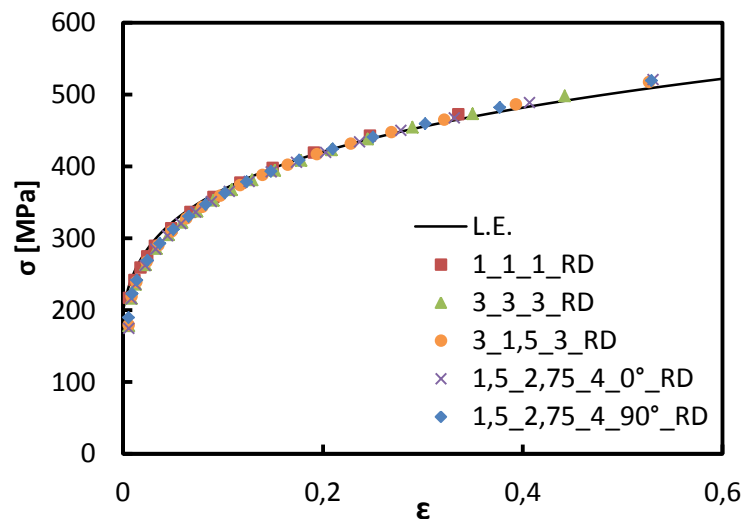
As equações de ajuste obtidas segundo os eixos maior e menor da matriz são, respectivamente:

$$\rho = 11641,32(h - 0,6671)^{-1,3411} , \quad (30)$$

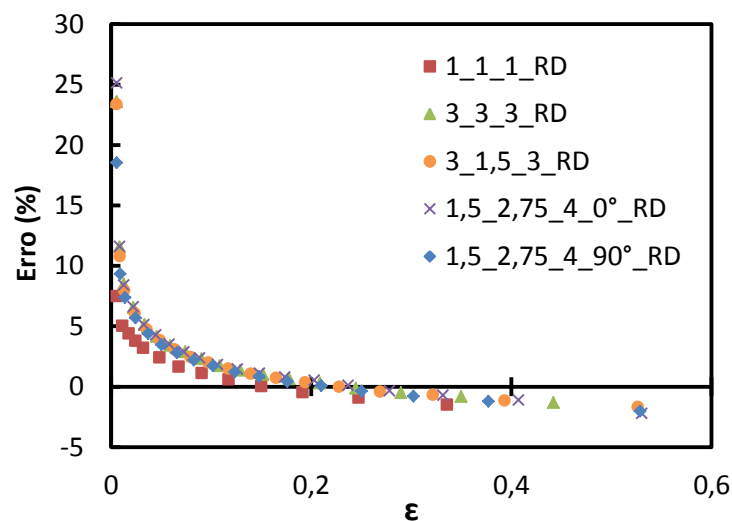
$$\rho = 1290,89(h)^{-1,0230} . \quad (31)$$

Na Figura 52 compararam-se os resultados obtidos para as curvas de encruamento com base na teoria da membrana, com a lei de encruamento (L.E.) de entrada no programa DD3IMP. Na Figura 52, a designação “\_RD” indica que o valor do raio de curvatura, que permitiu estabelecer o valor da tensão no pólo, foi determinado directamente, analisando os resultados numéricos da simulação do ensaio de expansão a cada altura do pólo, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator*. A Figura 53 apresenta a evolução do erro, relativo à tensão, em função da deformação equivalente. Até cerca de 0,20 da deformação, os valores da tensão são inferiores aos valores estimados pela lei de encruamento, após esse valor de deformação ocorre o inverso. Também é importante de

referir que o erro a partir de 0,10 da deformação não ultrapassa os 2%. Porém, no início do ensaio, os erros chegam a atingir 25% (para deformações da ordem de 0,05).



**Figura 52.** Comparação da curva de encruamento obtida com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (L.E.).



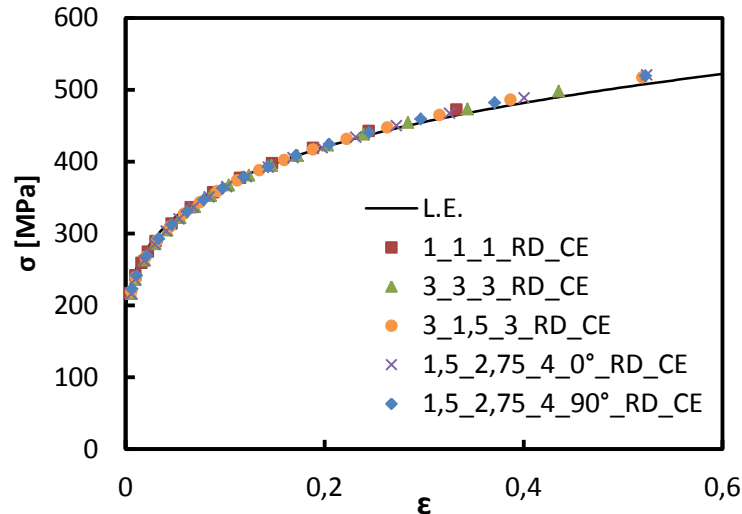
**Figura 53.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com recurso ao *software NXT Defect Evaluator* para determinar os raios de curvatura, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Os erros elevados no início do ensaio devem-se ao facto da deformação elástica representar uma parcela significativa da deformação total (com a qual temos trabalhado até ao momento). Assim, neste capítulo, optou-se por fazer a correcção das curvas de encruamento, retirando às deformações medidas,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , as parcelas referentes à

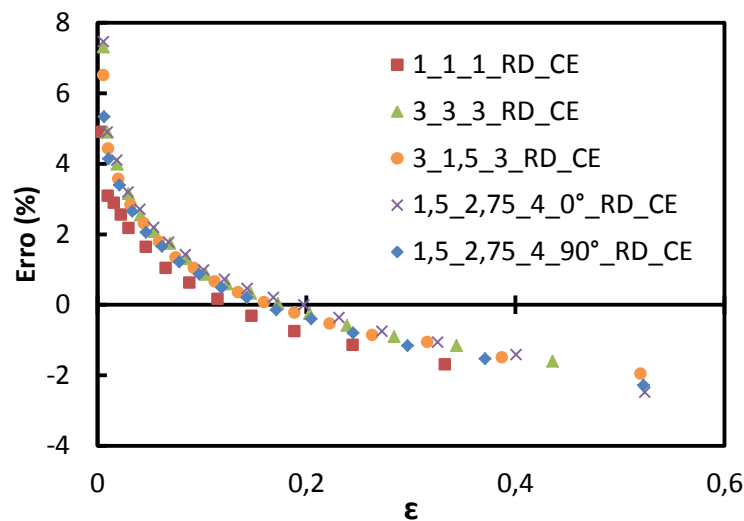
deformação elástica,  $\varepsilon_1^e$  e  $\varepsilon_2^e$  (antes de determinar a deformação equivalente,  $\varepsilon$ ), de acordo com as equações da lei Hooke generalizada:

$$\begin{cases} \varepsilon_1^e = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3)] \\ \varepsilon_2^e = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 - \sigma_3)] \end{cases} \quad (32)$$

Nas Figura 54 e 55 mostra-se os mesmos resultados das Figura 52 e 53, mas com a correcção das curvas de encruamento, retirando a parcela referente à deformação elástica. Nestas figuras, a designação “\_RD\_CE” indica que o raio de curvatura foi determinado directamente, de modo idêntico ao caso da Figura 52, e a parcela referente à deformação elástica foi retirada, isto é,  $\varepsilon$  representa apenas a deformação plástica. Nestas condições, os valores do erro diminuem significativamente, no início do ensaio, situando-se a cerca de 1/3 dos da Figura 53. Esta diferença no valor do erro atenua-se à medida que a deformação prossegue, pois a deformação elástica perde a sua importância quando comparada com a deformação total.

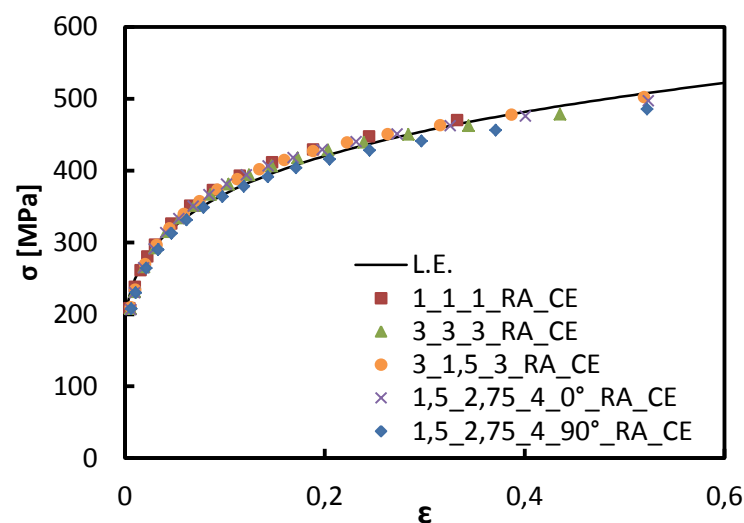


**Figura 54.** Idêntica à da Figura 51, mas com correcção da deformação elástica.

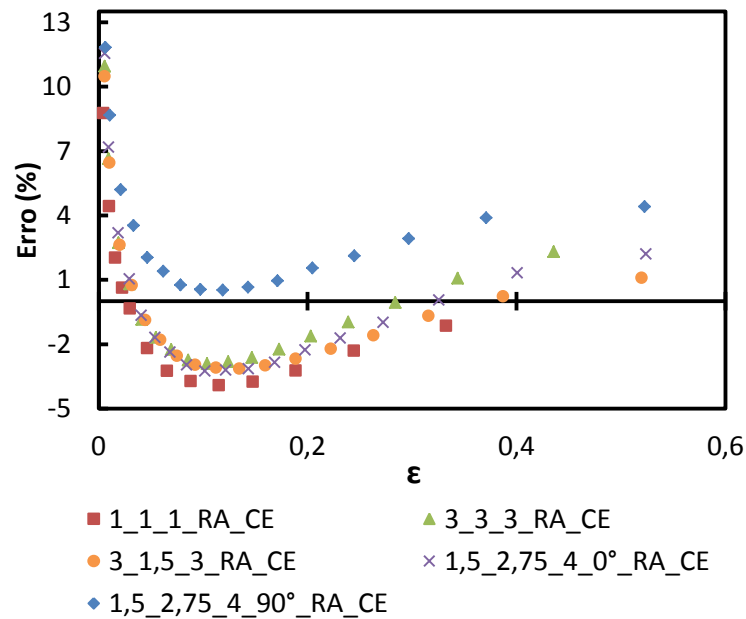


**Figura 55.** Idêntica à Figura 52 mas com correcção da deformação elástica.

Nas Figura 56 e 57 mostram-se o mesmo tipo de resultados das duas figuras anteriores, mas agora os raios de curvaturas para avaliação das tensões,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , foram determinados com base nas equações de ajuste (30) e (31). Nas figuras, é adicionada a designação “\_RA\_CE” para indicar que os raios de curvatura foram calculados através das equações de ajuste (30) e (31), e que a deformação elástica foi corrigida, como nas Figura 54 e 55. Na Figura 57, os erros indicam que, de um modo geral, a precisão na determinação das curvas de encruamento é menor do que nos casos anteriores, mas ainda assim relativamente aceitável (o erro não ultrapassa 4%, excepto para valores muito pequenos de deformação, inferiores a 0,05 de deformação).

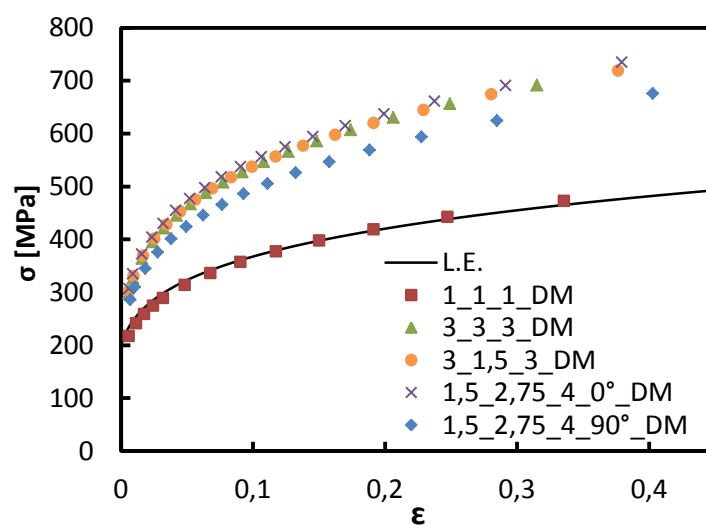


**Figura 56.** Comparação da curva de encruamento, determinando os raios de curvatura com base nas equações (30) e (31) (símbolos), com a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.).

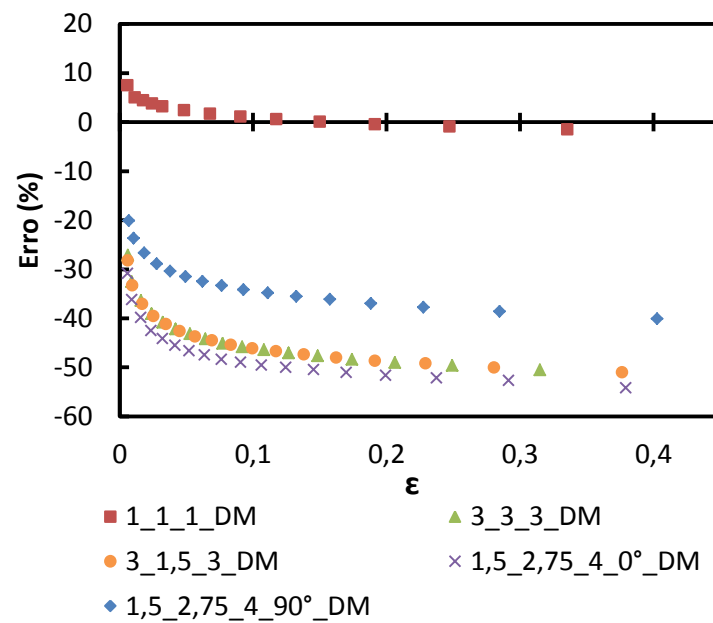


**Figura 57.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, calculando os raios de curvatura com base nas equações (30) e (31), em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

Nas Figura 58 e 59 os valores de tensão,  $\sigma$ , e deformação,  $\epsilon$ , equivalentes foram determinados segundo von Mises, equações (23), isto é supondo os materiais completamente isotrópicos. Também no caso da matriz elíptica, a curva tensão – deformação determinada nestas condições mostra valores elevados de erro, com exceção obviamente do material isotrópico (1\_1\_1).



**Figura 58.** Comparação entre os valores obtidos para a curva de encruamento com base no critério de von Mises (símbolos), e a curva de entrada na simulação numérica do ensaio (linha L.E.)



**Figura 59.** Evolução do erro cometido em tensão, na determinação da curva de encruamento, com base no critério de von Mises, em função da deformação equivalente no pólo,  $\epsilon$ .

## 7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação analisa-se a metodologia de determinação da lei de encruamento com recurso ao ensaio de expansão biaxial, em matrizes circular e elíptica, sob pressão hidráulica, com base na simulação numérica deste ensaio, utilizando o programa *DD3IMP*. O modelo numérico utilizado foi anteriormente testado para materiais isotrópicos obedecendo à lei de encruamento de Swift (Reis et al., 2011b).

Neste contexto, foi realizado um estudo sistemático envolvendo materiais com as mesmas propriedades plásticas (parâmetros da lei de encruamento de Swift) e elásticas (módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson), mas com diversos tipos de anisotropia no plano da chapa (i) isotrópicos no plano da chapa:  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 45^\circ) = r(\alpha = 90^\circ)$ ; (ii) anisotrópicos no plano da chapa, apresentando simetria em relação a um plano perpendicular ao da chapa que faz  $45^\circ$  com  $Ox$  (e com  $Oy$ ):  $r(\alpha = 0^\circ) = r(\alpha = 90^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ)$ ; (iii) anisotrópicos sem qualquer tipo de simetria:  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ .

Em ambos os ensaios de expansão biaxial, com matriz circular e matriz elíptica, a curva tensão - deformação foi determinada com base na teoria da membrana, recorrendo ao procedimento experimental clássico, que consiste na determinação directa do raio de curvatura no pólo, em momentos sucessivos do ensaio (o *software NXT Defect Evaluator* foi utilizado). Em alternativa a este procedimento, foi possível descrever convenientemente a evolução do raio de curvatura da calote em função da altura de pólo através de uma lei de potência, idêntica à anteriormente proposta (Reis et al., 2011b) para materiais completamente isotrópicos (von Mises) e obedecendo à lei de Swift.

O erro em tensão obtido com os dois procedimentos é idêntico, não ultrapassando cerca do 8%, no caso da matriz circular. Este valor ocorre no início do ensaio diminuindo acentuadamente desde os primeiros momentos do ensaio.

No caso da matriz elíptica o erro é em geral de cerca de 12% (excluindo os casos de valores de deformação equivalente, muito pequenos (próximos de 0,05), para os quais o erro pode atingir valores de cerca de 25%, quando o raio de curvatura é obtido através do *software NXT Defect Evaluator*). Constatou-se que estes erros elevados no

início do ensaio, podem ser reduzidos corrigindo as curvas de encruamento, retirando às deformações medidas (totais) as parcelas referentes à deformação elástica. Esta redução do valor do erro atenua-se à medida que a deformação prossegue, pois a deformação elástica perde a sua importância quando comparada com a deformação total. Nestas condições, os valores do erro no início do ensaio diminuem para valores inferiores a metade, não ultrapassando 8% no procedimento clássico e 12 % quando se utiliza as equações de ajuste para determinar os raios de curvatura. Porém, em ambos os casos, o valor de erro é sempre inferior a 4%, após 0,05 de deformação equivalente, ainda que de um modo geral seja superior quando as equações de ajuste são utilizadas.

Relativamente às trajetórias de tensão e de deformação, o tipo de anisotropia do material tal que:  $r(\alpha = 0^\circ) \neq r(\alpha = 45^\circ) \neq r(\alpha = 90^\circ)$ , induz um afastamento à equibiaxialidade, no caso da matriz circular. No caso da matriz elíptica, a geometria do ensaio, provoca um afastamento natural à equibiaxialidade, que no entanto é mais notório nas trajetórias de deformação do que nas de tensão. Nestas últimas, o afastamento à trajetória  $\sigma_1 = \sigma_2$  é relativamente pequeno, em todos os casos.

No que diz respeito às curvas de pressão em função da altura de pólo da calote, existe uma correlação entre o nível destas curvas e o valor médio dos coeficientes de anisotropia a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com a direcção de laminagem. O nível das curvas de pressão é mais elevado quanto maior for o valor médio daqueles coeficientes de anisotropia.

Em resumo, este trabalho mostrou que é possível simplificar o procedimento experimental clássico, para determinação do raio de curvatura no pólo. Porém, o procedimento alternativo, necessita de confirmação experimental, uma vez que os resultados da presente dissertação foram obtidos numericamente. Além disso, a aplicação deste procedimento alternativo necessita do conhecimento aproximado do valor do coeficiente de encruamento do material, que pode ser obtido com recurso a um simples ensaio de tracção segundo a direcção de laminagem (considerar este ensaio como referência, equivale a assumir  $G + H = 1$ , no critério de Hill'48). Finalmente, a correcta determinação da curva de encruamento necessita do conhecimento dos parâmetros do critério de plasticidade que descreve o comportamento da chapa.

Sobre este último aspecto vale a pena acrescentar que, no espaço das tensões, as trajetórias, em matriz elíptica e em matriz circular, são relativamente próximas (mesmo com uma relação entre os eixos maior e menor da elipse ligeiramente superior a 2, como



no caso presente), pelo que estes ensaios nos permitem definir a superfície de plasticidade (e consequentemente os parâmetros do critério) numa região muito pequena desta superfície. Assim, torna-se necessário recorrer a outros ensaios como os de tracção e corte segundo diversas direcções no plano da chapa, para determinar os parâmetros do critério. Estes últimos ensaios são mesmo necessários para a determinação dos parâmetros do critério associados às tensões de corte no plano da chapa (N no caso de Hill'48).



## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, J.L., Bouvier, S., Oliveira, M.C. e Menezes, L.F. (2005), “Drawbeads: to Be or Not to Be”, In: Smith, L.M., Pourboghrat, F., Yoon, J.-W. and Stoughton, T.B. (eds.). NUMISHEET 2005, The 6<sup>th</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes, Detroit, Michigan, U.S.A., 15-19 August 2005.
- Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J.W., Karabin, M.E., Brem, J.C. e Dick, R.E. (2005), “Linear transformation-based anisotropic yield function”, *International Journal of Plasticity*, 21, 1009-1039.
- Fernandes, J.V. (1984). “Estampagem de chapas de aço macio: Estudo da evolução da microestrutura de deslocamentos durante a deformação plástica”. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Hill R. (1950), *A Mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford.
- Hu, W. (2005), “An orthotropic yield criterion in a 3-D general stress state”, *International Journal of Plasticity*, 21, 1771-1796.
- Koç, M., Billur, E. e Cora, Ö.N. (2011), “An experimental study on the comparative assessment of hydraulic bulge test analysis methods”, *Materials and Design*, 32, 272–281.
- Lee, M.G., Kim, D., Kim, C., Wenner, M.L., Wagoner, R.H. e Chung, K. (2005a), “Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions”, *International Journal of Plasticity*, 21, 883-914.
- Lee, M.G., Kim, D., Kim, C., Wenner, M.L., Wagoner, R.H. e Chung, K. (2005b), “Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions”, *International Journal of Plasticity*, 21, 915-953.
- Menezes, L.F. and Teodosiu, C. (2000), “Three-dimensional numerical simulation of the deep-drawing process using solid finite elements”, *Journal of Materials Processing Technology*, 97, 100-106.
- NXT Defect Evaluator, M&M Research, Inc., <http://www.m-research.co.jp> , 2007.
- Prates, P.A. (2010). “Metodologia de Análise Inversa para Determinação Simultânea dos Parâmetros de Leis Constitutivas, com Recurso a um Provete Cruciforme”. Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Prates, P.A., Fernandes, J.V., Oliveira, M.C., Sakharova, N.A. (2011), “Inverse Analysis Methodology for Constitutive Parameters Identification of Metal Sheets Using a Cruciform Tensile Specimen”, CMNE 2011, Congresso de Métodos Numéricos e

- Computacionais em Engenharia, Tadeu, A., Figueiredo, I.N., Menezes, L.F., Mendes, P.A., Rodríguez-Ferran, A., Arias, I. e Blanco, J.M. (eds.), 59.
- Ranta-Eskola, A.J. (1979), "Use of the hydraulic bulge test in biaxial tensile testing", *International Journal of Mechanical Sciences*, 21, 457-465.
- Rees, D.W. (1995), "Plastic Flow in the Elliptical Bulge Test", *International Journal of Mechanical Sciences*, 37, 373-389.
- Reis, L.C. (2011a). "Caracterização do Comportamento Plástico de Chapas Metálicas com Recurso ao Ensaio de Expansão Biaxial Simétrica". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Reis, L.C., Prates, P.A., Oliveira, M.C., Sakharova, N.A., Fernandes, J.V. (2011b), "Caracterização do Comportamento Plástico de Chapas Metálicas com Recurso ao Ensaio de Expansão Biaxial Simétrica", CMNE 2011, Congresso de Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia, Tadeu, A., Figueiredo, I.N., Menezes, L.F., Mendes, P.A., Rodríguez-Ferran, A., Arias, I. e Blanco, J.M. (eds.), 54.
- Santos, A.D., Teixeira, P. e Barlat, F. (2011), "Flow Stress Determination Using Hydraulic Bulge Test and a Mechanical Measurement System", IDDRG 2011, International Deep Drawing Research Group Conference, Palacio Euskalduna, Bilbao, Spain, 05-08 June 2011, 91-100.
- Santos, A.D., Teixeira, P., Rocha, A.B. e Barlat, F. (2010), "On the Determination of Flow Stress Using Bulge Test and Mechanical Measurement", In: Barlat, F., Moon, Y.H. and Lee, M.G. (eds.). NUMIFORM 2010, The 10<sup>th</sup> International Conference on Proceedings, Pohang, Republic of Korea, 13-17 June 2010, 845-852.
- Teixeira, P.M. (2005), "'Benchmarks' Experimentais e Modelação Numérica por Elementos Finitos de Processos de Conformação Plástica", Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.
- von Mises, R. (1913), "Mechanik der Körper festen im plastisch deformablen Zustand", *Göttinger Nachrichten, Mathematical Physics*, 1, 582-592.
- Zang, S.L., Thuillier, S., LePort, A. e Manach, P.Y. (2011), "Prediction of anisotropy and hardening for metallic sheets in tension", *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 338-347.